

Die Theorie der inneren Dämpfung schwingender fester Körper

Voelz, Kurt

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 6, 1954,
S. 126-165



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Die Theorie der inneren Dämpfung schwingender fester Körper

Von Kurt Voelz

Mit 22 Abbildungen

Vorgelegt von Herrn M. Grützmacher*)

Summary: This paper gives a surviev on the theories existing today for damping of oscillating solids. The oldest are the purely formal representations of solids by Maxwell or Kelvin elements, today extended to a point where the solid is considered as a parallel wiring of such elements with a finite or infinite number of different relaxation times. From a physical point of view it must be distinguished between damping effects depending on the shape of the oscillating solids like damping by macroscopic heat currents and such effects due to the oscillating matter alone. For these latter Prandtl has elaborated a theory starting from the fact that matter consists of molecules; this theory has been extended and brought into a shape clearer from a mathematical point of view by Eyring. It includes as special cases damping independent of frequency and the true relaxation phenomena of which the most important are discussed.

Inhalt

1. Einleitung.
2. Maße für die Dämpfung.
3. Die phänomenologischen Deutungen der Dämpfung. — 3.1 Die integralen Darstellungen. — 3.11 Das Maxwellelement. — 3.12 Das Kelvin- oder Voigtelement. — 3.13 Endlich viele Arten parallel geschalteter Maxwellelemente. — 3.14 Unendlich viele Arten parallel geschalteter Maxwellelemente.
3.2 Die differentielle Darstellung.
4. Die verschiedenen Dämpfungseffekte. — 4.1 Die formabhängigen Effekte. — 4.11 Die Dämpfung durch makroskopische Wärmeleitung. — 4.12 Die Dämpfung durch makroskopische elektromagnetische Wirbelströme in ferromagnetischen Materialien.
4.2 Formunabhängige Effekte. — 4.21 Die allgemeinen molekularen Theorien der Relaxation. — 4.211 Die Beckersche Theorie. — 4.212 Die Prandtlsche Theorie. — 4.213 Die Eyringsche Formel.
4.22 Die verschiedenen Relaxationserscheinungen. — 4.221 Die Dämpfung durch mikroskopische Wärmeströme. — 4.222 Platzwechselfvorgänge von Atomen innerhalb eines Kristallgitters. — 4.223 Das Gleiten der Kristallflächen in polykristallinen Materialien. — 4.224 Die Relaxationserscheinungen bei Hochpolymeren.
5. Zusammenfassung.

*) Der Aufsatz ist eine verkürzte Fassung einer von der Deutschen Forschungsgemeinschaft unterstützten, in den Jahren 1951/52 durchgeführten Arbeit, die zum Ziel hatte, die bekannten Theorien über die Dämpfung fester schwingender Körper unter besonderer Berücksichtigung der während des Krieges in Amerika erschienenen, damals in Deutschland z. T. schwer zugänglichen Arbeiten zusammenzustellen und miteinander zu vergleichen. Das hier behandelte Gebiet gewinnt in zunehmendem Maße Bedeutung, insbesondere für die Entwicklung der Kunststoffe und das Verständnis ihres dynamischen Verhaltens. Eine große Zahl von Arbeiten über diesen Gegenstand ist inzwischen erschienen, zu deren Verständnis die vorliegende kritisch sichtende Einführung ihren besonderen Wert hat. M. Grützmacher.

1. Einleitung

In gasförmigen Medien läßt sich die Dämpfung von Schwingungen auf die Wirkung der Newtonschen Zähigkeit, der Wärmeleitfähigkeit und gegebenenfalls der Volumenviskosität so weit zurückführen, daß ihre Berechnung mit Hilfe dieser Konstanten höchstens noch mathematische Schwierigkeiten bietet und, wo diese überwunden werden können, Rechnung und Messung gut übereinstimmen. Dagegen lassen sich Aussagen über die Dämpfung fester Körper nur sehr schwer machen. Das hat seinen Grund darin, daß hierfür eine Vielzahl ineinandergreifender Ursachen verantwortlich ist. Diese wurden zunächst in einer Reihe phänomenologischer Ansätze zusammengefaßt, die den viskoelastischen Körper durch ein Aggregat von rein elastischen Federn und dem Newtonschen Fließgesetz folgenden Dämpfungselementen zu ersetzen versuchen. Die einfachsten dieser Ersatzkörper sind das Maxwell- und das Voigt- oder Kelvinelement. Ihnen gegenüber stand die von Boltzmann eingeführte Nachwirkungsfunktion. Sie ist jedoch nur eine andere mathematische Darstellung desselben physikalischen Sachverhalts und identisch mit einer Erweiterung des Maxwellelements.

Diese phänomenologischen Beschreibungen nehmen jedoch keine Rücksicht auf die wahren Ursachen der Schwingungsdämpfung, die in den Eigenschaften des molekularen Aufbaus der festen Stoffe zu suchen sind. Von diesen ausgehend, gelangte Prandtl 1928 zu einer Theorie des nichtelastischen Verhaltens fester Körper, die in den Jahren nach 1940 von Eyring durch Benutzung der von ihm entwickelten Theorie der Reaktionsgeschwindigkeiten in eine mathematisch günstigere Form gebracht wurde. Sie umfaßt auch die vorher schon einzeln untersuchten verschiedenen Relaxationserscheinungen der Metalle insofern, als diese weitgehend der Eyringschen Formel (56) folgen. Daneben war aber schon einige Jahre länger ein anderer Relaxationseffekt bekannt, der durch die Wärmeleitung hervorgerufen wird. Er zeichnet sich gegenüber den anderen bekannten Relaxationserscheinungen dadurch aus, daß die von ihm bewirkte Dämpfung eines schwingenden Körpers von dessen Abmessungen abhängt, so daß dieser Effekt stets vor der Betrachtung der Dämpfungseigenschaften eines bestimmten Materials von den gemessenen Werten abgezogen werden muß.

Man kann heute jedoch noch nicht auf die älteren phänomenologischen Darstellungen verzichten, da die Eyringsche Theorie in der vorliegenden Form noch nicht das gesamte nicht rein elastische Verhalten der festen Stoffe zu erklären vermag und darüber hinaus nur einige wenige leicht erfaßbare Relaxationserscheinungen aus der Gesamtheit der Dämpfungseffekte herausgelöst und isoliert gemessen werden konnten.

Es soll im folgenden gezeigt werden, welche Ursachen für die Dämpfung schwingender fester Körper heute bekannt sind und wie sich diese in das Gesamtgebiet des viskoelastischen Verhaltens der festen Körper einordnen. Um den Stoff gegenüber diesem allgemeineren Gebiet abzugrenzen, wollen wir uns auf die Betrachtung akustischer Schwingungen beschränken. Außer durch ihren Frequenzbereich sind sie durch kleine Amplituden ausgezeichnet.

2. Maße für die Dämpfung

Als Maße für die Dämpfung können verwandt werden:

1. Der Verlustwinkel φ

Bei einem verlustfreien Material ist nach dem Hookeschen Gesetz

$$P = G y \quad (1)$$

jeder Deformation y eine innere Spannung P unabhängig von dem zeitlichen Verlauf der Deformation zugeordnet, so daß bei periodischer Deformation $y = y_0 \cos \omega t$ Spannung und Deformation stets in Phase sind. Die Verteilung der Spannungen innerhalb des schwingenden Körpers mag hier wie im folgenden unberücksichtigt bleiben, die Spannung soll als gleichmäßig über den Körper verteilt angenommen werden. Unter P kann deswegen entweder die Spannung selbst oder die sie erzeugende Kraft und entsprechend unter y die relative Formänderung oder eine sie kennzeichnende Länge verstanden werden. G soll die zugehörige Elastizitätskonstante bezeichnen, z. B. Gleitmodul, Elastizitätsmodul, Kompressionsmodul; Gleichung (1) ist ebenso gut der mathematische Ausdruck für eine Torsion wie für eine Biegung oder Kompression.

Bei einem wirklichen Körper wird stets eine geringe Phasenverschiebung φ zwischen Spannung und Deformation beobachtet, so daß die Spannung eines in Schwingungen versetzten Körpers durch

$$P = G y_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

gegeben ist. In der komplexen Schreibweise

$$y = y_0 e^{\alpha t}, \quad P = \mathfrak{E} y_0 e^{\alpha t}, \quad \alpha = i \omega \quad (2)$$

wird dieser Sachverhalt durch einen komplexen Modul

$$\mathfrak{E} = E_1 + i E_2 = \frac{P}{y} \quad (3)$$

beschrieben, wo $E_1 = G \cdot \cos \varphi$ und $E_2 = G \cdot \sin \varphi$ sind.

Die während einer Periode in Wärme umgewandelte Energie ist

$$\Delta W = \int_0^{2\pi} P \frac{dy}{dt} \cdot dt = \pi y_0^2 \operatorname{Im} \mathfrak{E},$$

die Gesamtenergie der Schwingung ist

$$W_0 = \frac{1}{2} y_0^2 \operatorname{Re} \mathfrak{E}.$$

Es ist somit

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im} \mathfrak{E}}{\operatorname{Re} \mathfrak{E}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W}{W_0} \quad (4)$$

der 2π te Teil des Verhältnisses von verlorener Energie zur Gesamtenergie*).

2. Das logarithmische Dekrement δ .

Es ist definiert als der natürliche Logarithmus des Verhältnisses zweier aufeinanderfolgender, nach derselben Seite gerichteter Amplituden freier

*) In der amerikanischen Literatur wird $\operatorname{tg} \varphi$ gewöhnlich mit Q^{-1} , in Deutschland auch mit dem hier anderweitig benutzten Buchstaben η bezeichnet.

gedämpfter Schwingungen. Bei diesen ist die Größe α in (2) nicht mehr rein imaginär:

$$\alpha = -\frac{\omega \mathfrak{d}}{2\pi} + i\omega.$$

Für schwache Dämpfung gilt

$$\mathfrak{d} \approx \frac{1}{2} \frac{\Delta W}{W_0} \approx \pi \operatorname{tg} \varphi. \quad (5)$$

3. Die Halbwertbreite δ

Bei erzwungenen Schwingungen erreicht die Amplitude im Resonanzfall ein Maximum. Die Halbwertbreite δ ist der Unterschied zwischen den beiden Frequenzen oberhalb und unterhalb des Maximums, bei denen die Amplitude jeweils halb so groß wie die maximale Amplitude ist. Es ist

$$\delta = \frac{\mathfrak{d} \cdot f_0}{\pi} \sqrt{3} \approx f_0 \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \sqrt{3}$$

(f_0 = Frequenz bei Resonanz). Wird unter δ der Unterschied zwischen den beiden Frequenzen verstanden, bei denen die Schwingungsenergie gerade halb so groß wie die maximale Schwingungsenergie ist, so ist

$$\delta = \frac{f_0 \cdot \mathfrak{d}}{\pi} \approx f_0 \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

4. Bei fortschreitenden Wellen empfiehlt es sich, eine komplexe Geschwindigkeit $\mathfrak{c} = c_r + i c_i$ einzuführen. Dann ist die Dämpfung pro Längeneinheit

$$\beta = \frac{c_i \omega}{c_r^2 + c_i^2}$$

und die Wellenlänge

$$\lambda = 2\pi \frac{c_r^2 + c_i^2}{\omega c_r}.$$

Ein geeignetes Maß für die Dämpfung ist die dimensionslose Größe

$$\beta \lambda = 2\pi \frac{c_i}{c_r},$$

die man als das logarithmische Dekrement fortschreitender Wellen bezeichnen kann, da sie der natürliche Logarithmus des Verhältnisses der Höhe zweier aufeinanderfolgender Wellenberge ist. Geht man durch Überlagerung zweier entgegengesetzt laufender Wellenzüge zu stehenden Wellen über, so gilt stets

$$\alpha = \frac{z \mathfrak{c} i}{l},$$

wo die Länge l und die Zahl z durch die Randbedingungen festgelegt sind.

Damit wird

$$\mathfrak{d} = 2\pi \frac{c_i}{c_r} = \beta \lambda.$$

3. Die phänomenologischen Deutungen der Dämpfung

3.1 Die integralen Darstellungen

3.11 Das Maxwellelement

Die einfachste Deutung der Dämpfung schwingender Körper beruht darin, sie auf die Relaxation, d. h. das Nachlassen der Spannung mit der Zeit, zurückzuführen, die ihrerseits wieder durch die Annahme erklärt wird, daß die betreffenden Materialien aus sogenannten Maxwellelementen aufgebaut sind. Diese sollen aus einer Feder und einem Dämpfungselement bestehen (Abb. 1). Für die Feder gelte das Hookesche Gesetz, und in dem Dämpfungselement seien Spannung P und Geschwindigkeit \dot{y} wie beim Newtonschen Zähigkeitsgesetz proportional zueinander:

$$\dot{y} = \frac{P}{\eta}.$$

Die Summation ergibt

$$\dot{y} = \frac{\dot{P}}{G} + \frac{P}{\eta}. \quad (6)$$

Abb. 1. Maxwellelement.

Wird der Körper um einen gewissen Betrag deformiert und dann die Deformation aufrecht erhalten ($\dot{y} = 0$), so gibt die Integration

$$P = P_0 e^{-\frac{G}{\eta} t}, \quad (7)$$

d. h. die Spannung klingt nach einem exponentiellen Gesetz bis auf den Wert 0 ab.

Mit Hilfe des Ansatzes (2) wird bei Schwingungen der komplexe Elastizitätsmodul (3)

$$\mathfrak{E} = \frac{i\omega}{\frac{i\omega}{G} + \frac{1}{\eta}} = G\eta\omega \frac{\eta\omega + Gi}{G^2 + \eta^2\omega^2}.$$

Daraus folgt nach (4)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{G}{\eta\omega}. \quad (8)$$

Aus φ läßt sich nur das Verhältnis zwischen G und η berechnen. $\tau = \frac{\eta}{G}$ ist diejenige Zeit, innerhalb welcher nach (7) die Spannung auf den e -ten Teil abgesunken ist, und wird nach Maxwell Relaxationszeit genannt. Der reziproke Wert $\nu = \frac{G}{\eta}$ heißt Relaxationsfrequenz.

Für sehr kleine Frequenzen wird $\mathfrak{E} \approx \eta i\omega$ und für sehr große Frequenzen $\mathfrak{E} \approx G$. Außer der mindestens qualitativen Deutung der Relaxation vermögen die Maxwellelemente also auch die Tatsache zu erklären, daß sich viele Stoffe gegenüber langsam wirkenden Kräften wie Flüssigkeiten, gegenüber plötzlich angreifenden Kräften aber wie feste Körper verhalten.

3.12 Das Kelvin- oder Voigtelement

Maxwellelemente zeigen aber keine elastische Nachwirkung, d. i. die allmähliche Änderung der Deformation bei festgehaltener äußerer Spannung. Eine konstante Spannung $P = \text{const.}$ würde nämlich $\dot{y} = \text{const.}$, d. h. ein Fließen mit konstanter Geschwindigkeit ergeben, das im allgemeinen nicht beobachtet wird. Man kann zur Erklärung der elastischen Nachwirkung Kelvinelemente heranziehen, die aus einer Feder und einem dazu parallel geschalteten Dämpfungselement bestehen sollen (Abb. 2). Hier addieren sich die Spannungen, so daß die Gesamtspannung durch

$$P = G y + \eta \dot{y} \quad (9)$$

gegeben ist. Bei konstanter Spannung strebt die Deformation exponentiell dem zugehörigen Endwert zu. Die Kelvinelemente versagen aber bei der

Erklärung der Relaxation, da bei konstanter Deformation ($\dot{y} = 0$) die Spannung P von der Zeit unabhängig wäre.

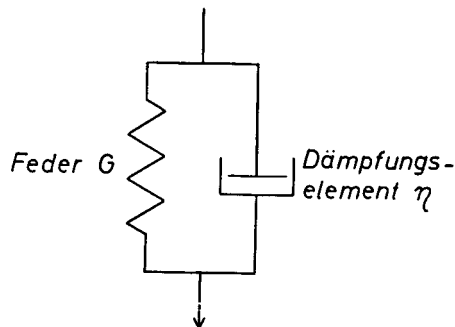


Abb. 2. Kelvinelement.

Bei Schwingungen wird wieder mit Hilfe des Ansatzes (2)

$$\mathfrak{E} = G + \eta \omega i$$

und

$$\text{tg } \varphi = \frac{\eta \omega}{G} \quad (10)$$

3.13 Endlich viele Arten parallel geschalteter Maxwellelemente

Schon das Kelvinelement läßt sich als Parallelschaltung zweier Maxwellelemente auffassen, deren eines einen unendlich großen Modul ($G_1 = \infty$) und deren anderes eine unendlich große Zähigkeit ($\eta_2 = \infty$) hat. Eine Verallgemeinerung, die eine bessere Anpassung an die Meßergebnisse erlaubt, besteht dann in der Annahme mehrerer, etwa n Arten von zueinander parallel geschalteten Maxwellelementen mit verschiedenen Federkonstanten G_j und verschiedenen Dämpfungen η_j ($j = 1, 2, \dots, n$) [4, 5, 11]. Der komplexe Modul hierfür wird

$$\mathfrak{E} = i \omega \sum_{j=1}^n \frac{1}{i \omega \frac{1}{G_j} + \frac{1}{\eta_j}}.$$

So läßt sich das Verhalten der hochpolymeren Kunststoffe nach Kuhn [14] u. a. durch zwei verschiedene Zusammenhaltsmechanismen deuten, von denen der eine eine verhältnismäßig lange Relaxationszeit besitzt, während man dem zweiten meist mehrere sehr viel kürzere Relaxationszeiten zuzuordnen hat.

Besondere Bedeutung besitzt der Fall, daß nur zwei Arten von Elementen ($n = 2$) vorliegen und die Relaxationszeit der einen Art $\tau_1 = \eta_1/G_1$ gegenüber

den in Frage kommenden Zeiten als unendlich groß angesehen werden kann, so daß auch $\eta_1 = \infty$ gesetzt werden kann. Hierfür wird

$$\mathfrak{E} = G_1 + G_2 \eta_2 \omega \frac{\eta_2 \omega + i G_2}{G_2^2 + \eta_2^2 \omega^2} \quad (11)$$

und

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{G_2^2 \eta_2 \omega}{G_1 G_2^2 + (G_1 + G_2) \eta_2^2 \omega^2} \quad (12)$$

Hat das ungedämpfte Gerüst, in das die Maxwellelemente der zweiten Art eingebaut sind, außerdem noch eine wesentlich härtere Feder ($G_1 \gg G_2$), so gilt

$$\operatorname{tg} \varphi \approx \frac{G_2}{G_1} \cdot \frac{1}{\frac{\nu_2}{\omega} + \frac{\omega}{\nu_2}} \quad (13)$$

mit $\nu_2 = G_2/\eta_2$. Bei großen Frequenzen verhält sich ein solcher Körper in bezug auf seine Dämpfung wie ein einfaches Maxwellelement (8), bei kleinen wie ein Kelvinelement (10). Wenn ω gleich der Relaxationsfrequenz ist

($\omega = \nu_2$), liegt ein Maximum mit dem Wert $\operatorname{tg} \varphi_{\max} = \frac{1}{2} \frac{G_2}{G_1}$ vor (vgl. Abb. 3).

Der Elastizitätsmodul ist auch frequenzabhängig:

$$E_1 = \Re \mathfrak{E} = G_1 + \frac{G_2 \eta_2^2 \omega^2}{G_2^2 + \eta_2^2 \omega^2}.$$

Für $\omega = 0$ wird

$$E_1(0) = E_{10} = G_1$$

und für $\omega = \infty$

$$E_1(\infty) = E_{1\infty} = G_1 + G_2.$$

Daher läßt sich auch schreiben:

$$E_1 = E_{10} + (E_{1\infty} - E_{10}) \cdot \frac{\omega^2}{\omega^2 + \nu_2^2}, \quad (14)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{E_{1\infty} - E_{10}}{E_{10}} \cdot \frac{1}{\frac{\omega}{\nu_2} + \frac{\nu_2}{\omega}}, \quad (15)$$

und es wird

$$\operatorname{tg} \varphi_{\max} = \frac{1}{2} \frac{E_{1\infty} - E_{10}}{E_{10}}. \quad (16)$$

3.14 Unendlich viele Arten parallel geschalteter Maxwellelemente

Obwohl ein Dämpfungsverhalten nach (15) in vielen wichtigen Fällen gemessen wird (vgl. Abschn. 4.11 und 4.22), ist die Darstellung durch endlich viele verschiedene Arten von Maxwellelementen in anderen Fällen noch unzulänglich. Man muß hier vielmehr annehmen, daß jedes Maxwellelement als Baustein des Körpers eine besondere Relaxationsfrequenz besitzt und daß diese stetig über den ganzen Körper verteilt sind. An Stelle der Summenzeichen treten jetzt Integrale, die eine bessere Anpassung an Meßergebnisse

gestatten. Eine ausführliche Behandlung dieser verallgemeinerten Theorie findet sich bei ter Haar [26]:

Die Auflösung von (6) nach P gibt mit $\nu = G/\eta$ und der Randbedingung, daß für $t = 0$ auch $y(0) = 0$ und $P(0) = 0$ ist,

$$P = G \int_0^t e^{-\nu(t-t')} \dot{y}(t') dt'.$$

Die Anzahl der Elemente mit einem G zwischen G und $G + dG$ und einem ν zwischen ν und $\nu + d\nu$ sei durch $N(G, \nu) dG d\nu$ gegeben. Mit der „Spektralfunktion“

$$N(\nu) = \int_0^\infty G \cdot N(G, \nu) dG,$$

welche die Häufigkeit des Auftretens von ν -Werten zwischen ν und $\nu + d\nu$ angibt, wobei aber jedes Element noch mit dem Gewicht G versehen ist, wird die Gesamtspannung, die von sämtlichen Maxwellelementen herrührt,

$$P = \int_0^\infty d\nu \cdot N(\nu) \cdot \int_0^t e^{-\nu(t-t')} \dot{y}(t') dt'.$$

Zur Vermeidung von Konvergenzschwierigkeiten werde in Zukunft angenommen, daß $N(\nu)$ für $\nu \rightarrow 0$ und $\nu \rightarrow \infty$ von genügend großer Ordnung gegen Null geht, so daß sämtliche vorkommenden Integrale konvergieren. Es muß dann aber das dem Wert $\nu = 0$ entsprechende rein elastische Skelett durch ein besonderes Glied $G_0 y$ berücksichtigt werden, so daß

$$P = G_0 y + \int_0^\infty d\nu \cdot N(\nu) \int_0^t e^{-\nu(t-t')} \dot{y}(t') dt' \quad (17)$$

zu schreiben ist.

Unter der Annahme, daß $N(G, \nu)$ bereits normiert ist:

$$\int_0^\infty dG \int_0^\infty d\nu \cdot N(G, \nu) = 1,$$

oder physikalisch gesprochen, daß $N(G, \nu)$ bereits durch die Anzahl aller Elemente geteilt ist, wird der Mittelwert von G

$$\bar{G} = \int_0^\infty d\nu \int_0^\infty dG \cdot G \cdot N(G, \nu) = \int_0^\infty d\nu \cdot N(\nu).$$

Mit der Funktion

$$\psi(t) = \frac{\bar{G}}{G_0 + \bar{G}} \left(1 - \frac{1}{\bar{G}} \int_0^\infty N(\nu) e^{-\nu t} d\nu \right) \quad (18)$$

wird aus (17) für den Fall, daß y so klein ist, daß G von y unabhängig ist,

$$P(t) = (G_0 + \bar{G}) \left[y(t) - \int_0^t \dot{y}(t') \psi(t - t') dt' \right]$$

oder nach partieller Integration

$$P(t) = (G_0 + \bar{G}) \left[y(t) - \int_0^t y(t') \dot{\psi}(t - t') dt' \right]. \quad (19)$$

$\dot{\psi}(t)$ ist die oft eingeführte Nachwirkungsfunktion. Gleichung (19) gibt an, daß die Spannung P zur Zeit t davon abhängt, welche Deformation das zu untersuchende Probestück im Laufe der Zeit von $t' = 0$ bis $t' = t$ durchgemacht hat. Umgekehrt wird dann auch die Deformation y zur Zeit t davon abhängig, welche Kräfte P in der Zeit von $t' = 0$ bis $t' = t$ gewirkt haben. Nach der Theorie der Integralgleichungen kann man nämlich auch die umgekehrte Gleichung

$$y(t) = \frac{P(t)}{\bar{G} + G_0} + \int_0^t \frac{P(t')}{\bar{G} + G_0} \dot{\varphi}(t - t') dt' \quad (20)$$

schreiben*). Die Kerne $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$ sind durch die Beziehung

$$\dot{\varphi}(t - t') = \dot{\psi}(t - t') + \int_{t'}^t \dot{\psi}(t - \xi) \dot{\varphi}(\xi - t') d\xi \quad (21)$$

miteinander verbunden**), die sich nach einer Laplace-Transformation

$$L_f(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

auch in der Form

$$L_{\dot{\varphi}}(s) = \frac{L_{\dot{\psi}}(s)}{1 - L_{\dot{\psi}}(s)}$$

oder

$$L_{\dot{\psi}}(s) = \frac{L_{\dot{\varphi}}(s)}{1 + L_{\dot{\varphi}}(s)}$$

schreiben läßt.

Ist also die für einen elastischen Körper charakteristische Spektralfunktion $N(\nu)$ gegeben, so läßt sich $\psi(t)$ nach (18) daraus berechnen. Es ist nämlich

$$\psi(t) = \int_0^\infty N(\nu) e^{-\nu t} d\nu = \bar{G} - (G_0 + \bar{G}) \psi(t) \quad (22)$$

die Laplace-Transformierte von $N(\nu)$. Umgekehrt kann $N(\nu)$ bestimmt werden, wenn $\psi(t)$ aus Messungen bekannt ist. Wegen des dazu erforder-

*) Die scheinbare Schwierigkeit, daß in beiden Integralen t als obere Grenze auftritt, kann dadurch umgangen werden, daß $t' = \infty$ als obere Grenze eingesetzt und die Funktionen ψ und φ durch andere ersetzt werden, die für $t' \leq t$ den gleichen Wert haben und Null für $t' > t$ sind.

**) Vgl. etwa: Riemann-Weber, Differentialgleichungen der Physik, Bd. I, 7. Aufl., S. 425.

lichen großen Rechenaufwandes sind mehrfach Näherungen für $N(\nu)$ angegeben worden [23, 26]. Eine solche ist ***)

$$N(\nu) \approx \frac{1}{\nu} \psi\left(\frac{1}{\nu}\right). \quad (23)$$

Für Schwingungen folgt†) aus (17) mit dem Ansatz (2):

$$\mathfrak{E} = G_0 + i\omega \int_0^\infty \frac{N(\nu) d\nu}{\nu + i\omega}.$$

Trennung in Real- und Imaginärteil $\mathfrak{E} = E_1 + i E_2$ gibt

$$E_1 = G_0 + \int_0^\infty \frac{\omega^2}{\omega^2 + \nu^2} N(\nu) d\nu, \quad E_2 = \int_0^\infty \frac{\omega \nu}{\omega^2 + \nu^2} N(\nu) d\nu. \quad (24)$$

G_0 ist also der Wert des Elastizitätsmoduls für die Frequenz $\omega = 0$. Für sehr große Frequenzen wird $E_1(\infty) = G_0 + \bar{G}$.

Statt durch unendlich viele kann das Material auch durch ein einziges Maxwellelement mit einem frequenzabhängigen Modul $G(\omega)$ und frequenzabhängiger Zähigkeit $\eta(\omega)$ beschrieben werden, die beide aus den Gleichungen

$$\frac{G \eta^2 \omega^2}{G^2 + \eta^2 \omega^2} = E_1, \quad \frac{G^2 \eta \omega}{G^2 + \eta^2 \omega^2} = E_2$$

zu bestimmen sind. Ebensogut läßt sich aber auch ein Kelvinelement mit dem Modul $G = E_1$ und der Zähigkeit $\eta = \frac{E_2}{\omega}$, die auch wieder beide frequenzabhängig sind, verwenden.

Eine derartige Darstellung durch ein einziges Kelvinelement bietet für die Untersuchung von Schwingungen große Vorteile; denn man kann jetzt die gedämpften Schwingungen ebenso berechnen wie bisher die ungedämpften. man hat nur den bisher benützten Elastizitätsmodul durch den komplexen $\mathfrak{E} = G(\omega) + \eta(\omega) \cdot \omega i$ zu ersetzen. Zu beachten ist aber, daß für die Beschreibung elastischer Formänderungen stets zwei Materialkonstanten notwendig sind. Dabei ist es gleichgültig, welche zwei der Größen: Gleitmodul, Elastizitätsmodul, Kompressibilität oder Poissonsche Zahl, verwendet werden. Aus praktischen Gründen empfiehlt Skudrzyk [24], Gleitmodul \mathfrak{G} und Kompressibilität \mathfrak{K} zu benützen, da nach seinen Messungen der Imaginärteil

***) Sie wird mit Hilfe der Diracschen Deltafunktion gewonnen, die durch

$$\delta(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \neq 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

definiert ist und die die Eigenschaft hat, daß für jede Funktion $f(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

gilt. Die Näherung besteht dann darin, daß die Funktion $\nu e^{-\nu t}$, die bei $\nu = 1/t$ ein Maximum hat und für $\nu = 0$ und $\nu = \infty$ gegen Null geht, durch $t^{-2} \delta(\nu - 1/t)$ ersetzt wird.

†) In dem zweiten Integral ist jetzt von $t' = -\infty$ aus zu integrieren.

der letzteren unabhängig von ω ist, während der Imaginärteil von \mathfrak{G} eine starke Abhängigkeit zeigt, die in den Imaginärteilen des Elastizitätsmoduls und der Poissonschen Zahl wiederkehren würde. Außerdem scheint für viele Stoffe, wie Metalle, der Imaginärteil von \Re klein gegenüber dem von \mathfrak{G} zu sein, so daß praktisch nur mit dem von \mathfrak{G} gerechnet zu werden braucht. Die Spannungen können dann in der Form

$$P_{ik} = \mathfrak{G} \varepsilon_{ik} \quad (i \neq k)$$

$$P_{ii} = 2 \mathfrak{G} \varepsilon_{ii} + \left(\Re - \frac{2}{3} \mathfrak{G} \right) \sum_1^3 \varepsilon_{ii}$$

angeschrieben werden, und daraus können ebenso wie bisher mit den reellen Größen eine komplexe Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c(\omega)$ der elastischen Wellen und schließlich komplexe Frequenzen errechnet werden.

Zur Bestimmung von $N(\nu)$ aus Dämpfungsmessungen möge (17) mit der unteren Grenze $t' = -\infty$ durch $t'' = t - t'$ in

$$\mathfrak{E} = G_0 + i\omega \int_0^\infty dt'' e^{-i\omega t''} \int_0^\infty N(\nu) \cdot e^{-\nu t''} d\nu = G_0 + i\omega \int_0^\infty \psi(t') e^{-i\omega t'} dt'$$

umgewandelt werden. Die Trennung in Real- und Imaginärteil zeigt, daß die

Funktionen $\frac{E_1(\omega) - G_0}{\omega}$ und $\frac{E_2(\omega)}{\omega}$ die Fouriertransformierten von $\psi(t)$ sind:

$$\frac{E_1(\omega) - G_0}{\omega} = \int_0^\infty \psi(t) \cdot \sin \omega t dt, \quad \frac{E_2(\omega)}{\omega} = \int_0^\infty \psi(t) \cos \omega t dt.$$

Dann gelten auch die Umkehrungen*)

$$\psi(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{E_2(\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{E_1(\omega) - G_0}{\omega} \sin \omega t d\omega. \quad (25)$$

Als Real- und Imaginärteil der analytischen Funktion $\mathfrak{E}(\omega)$ sind $E_1(\omega)$ und $E_2(\omega)$ voneinander abhängig; ist die eine der beiden Funktionen festgelegt, so ist damit auch die zweite bestimmt. Gleichzeitig bietet die zweimalige Fouriertransformation mit Hilfe der Funktion $\psi(t)$ einen Weg, die eine der beiden Funktionen aus der anderen zu berechnen. Es ergibt sich nämlich

$$\frac{E_1(\omega) - E_1(0)}{\omega} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{E_2(\varrho)}{\varrho} \cdot \frac{\omega}{\omega^2 - \varrho^2} d\varrho,$$

$$\frac{E_2(\omega)}{\omega} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{E_1(\varrho) - E_1(0)}{\varrho} \cdot \frac{\varrho}{\varrho^2 - \omega^2} d\varrho.$$

*) Vgl. etwa G. Doetsch, Handbuch der Laplacetransformation. Bd. 1, S. 196.

Damit läßt sich der Unterschied $E_1(\infty) - E_1(0)$ zwischen den Elastizitätsmoduln bei sehr großer und sehr kleiner Frequenz auch durch die Verluste ausdrücken:

$$E_1(\infty) - E_1(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{E_2(\varrho)}{\varrho} d\varrho.$$

Diese Gleichung kann als eine Verallgemeinerung von (16) angesehen werden.

Der Verlauf von $N(\nu)$ kann direkt aus $\mathfrak{E}(\omega)$ erschlossen werden. In [9] geben Fuoss und Kirkwood eine Berechnung der Spektralfunktion aus dem Verlauf der Dielektrizitätskonstanten an, für die ähnliche Formeln wie für den Elastizitätsmodul gelten. Die Übertragung auf den hier vorliegenden Fall gibt eine Möglichkeit, $N(\nu)$ aus $E_1(\omega)$ auszurechnen. Schreibt man dazu

$$x = -\ln \omega \quad \text{und} \quad s = -\ln \nu$$

und setzt $N(\nu) = M(s)$, so wird

$$\frac{\mathfrak{E}(\omega)}{\omega} = H(x) + i I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{s-x} + i}{1 + e^{2(s-x)}} M(s) ds.$$

Nach Einführung der Funktion

$$K(t) = \frac{1}{2 \operatorname{csf} t}$$

wird der Realteil

$$H(x) = \frac{E_1(\omega)}{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} K(s-x) M(s) ds.$$

Wird unter

$$F_f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iux} dx$$

allgemein die Fouriertransformierte von f verstanden, so gilt

$$F_H(u) = F_K(-u) \cdot F_M(u).$$

Durch Umkehr der Fouriertransformation wird aber

$$M(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ius} F_M(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ius} \frac{F_H(u)}{F_K(-u)} du.$$

Wegen (siehe [9])

$$F_K(u) = \frac{\pi}{2 \operatorname{csf} \frac{\pi u}{2}} \quad (26)$$

wird schließlich

$$M(s) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(x) \left\{ \exp \left[-i u \left(s - x + i \frac{\pi}{2} \right) \right] \right. \\ \left. + \exp \left[-i u \left(s - x - i \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\} dx du$$

oder nach Ausrechnen der zweimaligen Fouriertransformation

$$M(s) = \frac{1}{\pi} \left[H \left(s + i \frac{\pi}{2} \right) + H \left(s - i \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

Abschätzungen über den Verlauf von $N(\nu)$ können wieder mit Hilfe der Diracschen Deltafunktion gewonnen werden. Wegen Konvergenzschwierigkeiten müssen hierfür jedoch die Ableitungen $dE_1/d\omega$ und $dE_2/d\omega$ herangezogen werden. Es ist

$$\frac{dE_1}{d\omega} = \frac{2}{\omega} \int_0^{\infty} \frac{N(\nu)}{\left(\frac{\omega}{\nu} + \frac{\nu}{\omega} \right)^2} d\nu \approx \frac{\pi}{2} N(\omega)$$

und

$$\frac{d(E_2 \cdot \omega)}{d\omega} \approx \frac{\pi}{2} \omega N(\omega). \quad (27)$$

Für den häufig vorkommenden Fall, daß für einen bestimmten Frequenzbereich $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ die Verluste unabhängig von ω sind, so daß auch $E_2(\omega) \approx \text{const.}$ ist, wird durch diese Näherung

$$N(\nu) \approx \frac{\text{const}}{\nu} \text{ für } \nu_1 \leq \nu \leq \nu_2. \quad (28)$$

Eine Bestimmung von $\psi(t)$ nach (23) genügt hier nicht. Man erhält eine bessere Näherung, wenn man den Integranden durch die Funktion

$$f(\nu) = \begin{cases} \nu^{-1} & \text{für } \nu \leq \frac{1}{t} \\ 0 & \text{für } \nu > \frac{1}{t} \end{cases}$$

annähert. Dann wird

$$\psi(t) = \text{const} \cdot \ln \nu_1 t. \quad (29)$$

Da sich $\psi(t)$ aus meßtechnischen Gründen nur für verhältnismäßig große Werte t bestimmen läßt, kann man $N(\nu)$ aus $\psi(t)$ nur für die entsprechend kleinen Werte $\nu \approx \frac{1}{t}$ berechnen. Dagegen kann aus denselben Gründen $E_2(\omega)$ nur für große Werte ω gemessen werden, so daß $N(\nu)$ aus $E_2(\omega)$ nur für die entsprechend großen Werte $\nu \approx \omega$ berechnet werden kann. Beide Methoden

überdecken sich nur in einem schmalen Bereich um $\omega \sim 1 \text{ sec}^{-1}$. Man kann so unter Zuhilfenahme beider Methoden $N(\nu)$ für einen weiten Spektralbereich bestimmen, hat aber nur geringe Möglichkeiten, beide Ergebnisse miteinander zu vergleichen.

3.2 Die differentielle Darstellung

Statt die Gleichung (6) oder (9) durch eine Integration über die Verteilungsfunktion zu erweitern und den Meßergebnissen anzupassen, kann diese Verallgemeinerung auch durch Zuhilfenahme weiterer Differentialquotienten erfolgen, indem (6) oder besser (9) als die ersten Glieder einer Taylorreihe angesehen werden:

$$P = a_0 y + a_1 \frac{d y}{d t} + a_2 \frac{d^2 y}{d t^2} + \dots$$

Eine ähnliche Reihe, in welcher y durch P und dessen Ableitungen nach der Zeit gegeben ist, kann durch Auflösen nach y erhalten werden. Eine weitere Verallgemeinerung würde eine Zustandsgleichung der Form

$$P + \sum a_n \frac{d^n P}{d t^n} = b_0 y + \sum b_n \frac{d^n y}{d t^n}$$

darstellen. So gelangt Meixner [15] aus rein thermodynamischen Überlegungen zu einer solchen Gleichung, in der auf beiden Seiten die erste Ableitung nach der Zeit steht und in der die zugehörigen Koeffizienten entweder beide Null oder beide verschieden von Null sein müssen.

Gegenüber der integralen Darstellung bietet die differentielle aber keinerlei Vorteile, da jetzt statt der zwei Konstanten G und η deren unendlich viele $a_0, a_1, a_2 \dots$ auftreten. Im Falle harmonischer Schwingungen kann das Zeichen d/dt durch $i\omega$ ersetzt werden und die Reihe

$$\mathfrak{E} = a_0 - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 - \dots + i\omega (a_1 - a_3 \omega^2 + a_5 \omega^4 - \dots)$$

zu einer einzigen komplexen, von ω abhängigen Größe \mathfrak{E} zusammengefaßt werden. Dann stimmen differentielle und integrale Darstellung überein.

Speziell führt die Meixnersche Gleichung zu dem Wert (12) für $\text{tg } \varphi$. Seine Betrachtungen, die keine Modellvorstellung zu Hilfe nehmen, können daher durch das Maxwellelement in dem ungedämpften Skelett veranschaulicht werden, dessen Verhalten man auch durch die Meixnersche Gleichung beschreiben kann.

Außer den Gliedern, die nur Ableitungen nach der Zeit enthalten, können aber auch noch solche mit weiteren Ableitungen nach den Koordinaten und deren Ableitungen nach der Zeit auftreten. Dadurch wird die gesamte Gleichung noch unübersichtlicher. Man muß sich deshalb darauf beschränken, bestimmte Effekte, bei denen die Konstanten bekannt sind, einzeln zu untersuchen. Eine solche Trennung ist aber noch aus einem anderen Grunde unbedingt erforderlich. Denn das Auftreten von gemischten Gliedern hat auf dem Wege über die Randbedingungen zur Folge, daß die Dämpfung jetzt auch von den Abmessungen des Körpers abhängig wird. Man muß deshalb stets in solche

Effekte trennen, bei denen die charakteristische Kurve eine wirkliche Materialeigenschaft ist, und in solche, bei denen sie von den Abmessungen des Körpers abhängt.

Im folgenden sollen diese Effekte, soweit sie bis heute näher untersucht sind, einzeln betrachtet werden, und zwar zuerst die formabhängigen, da sie am eingehendsten studiert sind und die von ihnen verursachte Dämpfung vor jeder weiteren Deutung von Meßergebnissen von diesen abgezogen werden muß.

4. Die verschiedenen Dämpfungseffekte

4.1 Die formabhängigen Effekte

4.11 Die Dämpfung durch makroskopische Wärmeleitung

Die Schwingungsdämpfung durch makroskopische Wärmeleitung ist der bisher am besten untersuchte Dämpfungseffekt [3, 18, 31]. Sie wird dadurch hervorgerufen, daß an den komprimierten Stellen Wärme erzeugt und an den gedehnten Stellen der Körper abgekühlt wird. Durch die Wärmeleitung eines jeden Stoffes fließt Wärme von den komprimierten und erwärmten zu den abgekühlten Stellen über. Wärmeleitung ist aber ein irreversibler Prozeß. Durch ihn wird mechanische Schwingungsenergie in Wärme umgewandelt. Der Effekt ist am größten, wenn die Schwingungsdauer groß genug zur Ausbildung eines hinreichend steilen Temperaturgradienten ist. Da bei Längsschwingungen große Schwingungsdauern auch zu großen Wellenlängen gehören, spielt die Wärmedämpfung hier keine Rolle. Bei Biegeschwingungen dünner Stäbe und Platten liegen jedoch gedehnte und komprimierte Stellen unabhängig von der Schwingungsdauer dicht nebeneinander, und hier überträgt bei Metallstäben von etwa 1 mm Dicke und Schwingungsdauern von 1 sec wegen ihrer großen Wärmeleitfähigkeit die Wärmedämpfung alle anderen Dämpfungseffekte.

Grundlagen für eine Berechnung sind:

1. Die durch ein von der Temperatur T abhängiges Glied erweiterte Spannungsgleichung

$$P_{\nu\nu} = \frac{E}{1 + \mu} \left\{ e_{\nu\nu} + \frac{\mu}{1 - 2\mu} \theta \right\} + \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\nu} \delta T \quad (30)$$

(δT = Abweichung der Temperatur von ihrem Mittelwert T_0). Die Schubspannungen $P_{\mu\nu} = \frac{E}{1 + \mu} e_{\mu\nu}$ bleiben ungeändert. In isotropen Medien ist

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\nu} = - \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\nu},$$

wenn unter p der von allen Seiten gleichmäßig wirkende äußere Druck verstanden wird. Aus der Spannungsgleichung kann die Bewegungsgleichung auf dem üblichen Wege hergeleitet werden; sie lautet jetzt

$$\rho \ddot{s} = \frac{E}{2(1 + \mu)} \left\{ \Delta s + \frac{1}{1 - 2\mu} \text{grad } \theta \right\} + \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\nu} \text{grad } \delta T. \quad (31)$$

2. Die Wärmeleitungsgleichung:

$$\varrho_0 \frac{\partial Q}{\partial t} = \lambda \Delta \delta T \quad (32)$$

(Q = Wärme pro Masseneinheit, λ = Wärmeleitungskoeffizient). ϱ_0 ist die zu T_0 und dem äußeren Druck p_0 gehörige mittlere Dichte. Der Wärmehalt ist jetzt aber nicht nur von der Temperatur T , sondern auch von der Kompression abhängig:

$$dQ = c_v dT + \left(\frac{\partial Q}{\partial \theta} \right)_T \cdot d\theta, \quad (33)$$

wo unter $c_v = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_\theta$ die spezifische Wärme bei konstantem Volumen zu verstehen ist. Damit wird aus (32)

$$\delta \dot{T} + \frac{1}{c_v} \left(\frac{\partial Q}{\partial \theta} \right)_T \dot{\theta} = \frac{\lambda}{\varrho_0 c_v} \Delta \delta T. \quad (34)$$

Die exakte Lösung des Systems der beiden Differentialgleichungen 2. Ordnung (31) und (34) ist sehr umständlich; für praktische Zwecke reicht eine Iteration aus, bei der die Temperaturverteilung δT aus Gleichung (34) errechnet wird, wenn darin für θ der Wert für die ungedämpfte Schwingung gesetzt wird, wie er aus (31) ohne das letzte Glied folgt. Als Randbedingung für (34) ist zu fordern, daß der schwingende Körper keine Wärme an die Umgebung abgibt,

an der Oberfläche also $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ (n = Normale zur Oberfläche) ist. Mit dieser

Randbedingung dürfte man der Wirklichkeit am nächsten kommen.

Die Lösung von (34) ist dann

$$\delta T = - \frac{1}{c_v} \left(\frac{\partial Q}{\partial \theta} \right)_T \sum_j \frac{G_j U_j \omega}{\omega_j^2 + \omega^2} (\omega \cos \omega t - \omega_j \sin \omega t), \quad (35)$$

wo ω_j die Eigenwerte und U_j die Eigenfunktionen der zu (34) gehörenden homogenen Differentialgleichung und die $G_j = \int_V U_j dV$ die Fourierkonstanten von θ in bezug auf die U_j sind.

Die von den elastischen Kräften während einer Periode geleistete Arbeit ist, wenn die Spannungen P_{rr} nach (30) durch die Temperatur δT ausgedrückt werden,

$$\Delta W = - \frac{\pi}{c_v} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\theta \left(\frac{\partial Q}{\partial \theta} \right)_T \sum_k G_k^2 \frac{\omega \omega_k}{\omega^2 + \omega_k^2}. \quad (36)$$

Daraus lassen sich zusammen mit der potentiellen Energie der Schwingung nach (4) oder (5) die Verluste ausrechnen.

Es empfiehlt sich, den Wert $\frac{1}{c_v} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\theta \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial \theta} \right)_T$ noch in eine anschauliche oder möglichst in eine solche Form zu überführen, daß er leicht Tabellen entnommen werden kann. Hierfür kommen in Frage:

1. die Differenz der beiden Kompressionsmoduln bei konstant gehaltener Temperatur und adiabatischer Kompression:

$$-\frac{1}{c_v} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\theta \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial \theta} \right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right)_S - \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right)_T, \quad (37)$$

2. die Differenz der spezifischen Wärmen:

$$-\frac{1}{c_v} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\theta \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial \theta} \right)_T = \frac{c_p - c_v}{c_v} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right)_T, \quad (38)$$

3. für die praktische Rechnung am geeignetsten ist die Form

$$-\frac{1}{c_v} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\theta \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial \theta} \right)_T = \frac{T}{c_p \cdot \varrho} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right)_S \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right)_T \left(\frac{\partial \theta}{\partial T} \right)_p^2, \quad (39)$$

wo die spezifische Wärme c_p wie üblich auf die Masseneinheit bezogen ist, denn unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung kann $\left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right)_S = \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right)_T$ gesetzt werden, und sämtliche Glieder können Tabellen entnommen werden.

Bei den Schwingungen eines langen, dünnen Stabes können die Spannungen und ebenso die Dilatationen senkrecht zur Stabachse gegenüber den entsprechenden Werten in Richtung der Stabachse vernachlässigt werden. In der ganzen Rechnung kann θ durch e_{zz} und p durch $-P_{zz}$ ersetzt werden, und statt der Differentialquotienten $\partial p / \partial \theta$ und $\partial \theta / \partial T$ treten der negative Wert des Elastizitätsmoduls E und der lineare Ausdehnungskoeffizient α auf.

Bei Biegeschwingungen sind die Koeffizienten G_k alle klein gegenüber G_1 , so daß bei nicht zu hohen Frequenzen nur das erste Glied berücksichtigt zu werden braucht. Es bleibt übrig (vgl. Abb. 3)

$$\mathfrak{d} = \frac{2 \mathfrak{d}_{\max}}{\frac{\omega}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega}}. \quad (40)$$

Die thermische Dämpfung erreicht einen Maximalwert \mathfrak{d}_{\max} , wenn $\omega = \omega_1$ ist, und wird für sehr große und sehr kleine Frequenzen Null. Bei großen Frequenzen ist während der kurzen Schwingungsdauer nicht genügend Zeit zur Ausbildung des Wärmestromes vorhanden, und bei sehr langsamen Schwingungen verhält sich der Körper wie ein isotherm schwingender, es entstehen in ihm überhaupt keine Wärmeunterschiede. Am größten sind die Verluste, wenn der von einer Stelle erhöhter Temperatur ausgehende Wärmestrom gerade auf eine Stelle erniedrigter Temperatur trifft. Die Geschwindigkeit einer Wärmewelle in einem periodisch erhitzten Körper ist $\sqrt{\frac{2 \lambda \omega}{c \varrho}}$, der

während einer Schwingungsdauer zurückgelegte Weg also $2 \pi \sqrt{\frac{2 \lambda}{\varrho c \omega}}$. Dieser Weg muß vergleichbar mit dem Abstand zwischen Stellen größter Kompression und größter Dilatation sein, bei Biegeschwingungen von Stäben also mit ihrer Dicke. Die Rechnung gibt für den kreisrunden Stab mit dem Halbmesser R

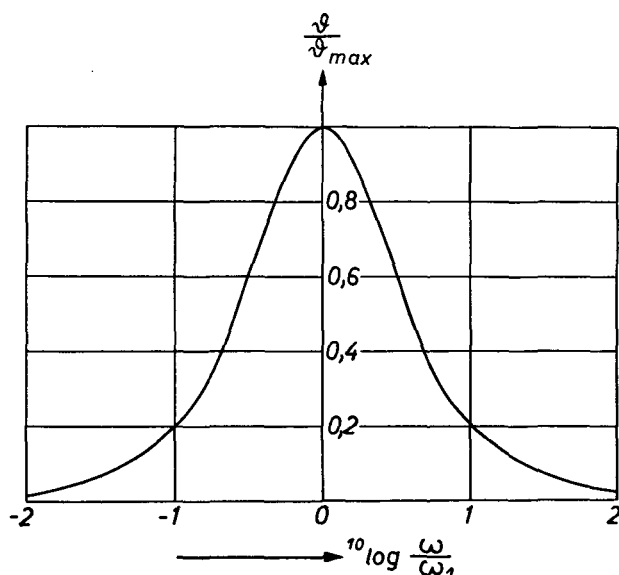


Abb. 3. Die thermische Dämpfung eines schwingenden Stabes nach Gleichung (40).

$$\omega_1 = 3,39 \frac{\lambda}{c \varrho R^2} \quad \text{und} \quad d_{\max} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{E a^2 T}{c \varrho} \quad (41)$$

(a = linearer Wärmeausdehnungskoeffizient) und für Stäbe mit rechteckigem Querschnitt

$$\omega_1 = \pi^2 \frac{\lambda}{c \varrho d^2} \quad \text{und} \quad d_{\max} = \frac{48}{\pi^3} \cdot \frac{E a^2 T}{c \varrho}$$

(d = Dicke des Stabes in der Biegungsebene).

Bei Längsschwingungen muß der während einer Periode zurückgelegte Weg der Wärmewelle vergleichbar mit der halben Wellenlänge sein. Die Ausrechnung ergibt

$$\omega_1 = \pi^2 \frac{\lambda}{c \varrho l^2} \quad \text{und} \quad d_{\max} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{E a^2 T}{c \varrho}.$$

Die Dämpfung spielt nur in dem Ausnahmefall sehr kleiner Wellenlängen eine Rolle. Als weitere Fälle hat Päsler [18] die Schwingungen einer Platte und einer Kugel berechnet.

Gleichung (40) ist identisch mit (15). Die Temperaturdämpfung kann als ein Beispiel für den dort behandelten Fall angesehen werden, nämlich die Dämpfung von Maxwellelementen mit weicher Feder G_2 , die in ein ungedämpftes Gerüst ($\eta_1 = \infty$) mit wesentlich härterer Feder ($G_1 \gg G_2$) eingebaut sind. Die Relaxationsfrequenz ω_1 ist aber keine Materialkonstante, sondern durch die Abmessungen des schwingenden Körpers mitbestimmt. Die zusätzliche Wirkung der Feder G_2 zur Feder G_1 ruft natürlich auch eine Änderung des Elastizitätsmoduls hervor, der jetzt frequenzabhängig wird. Der Vergleich von (14) und (16) mit (40) liefert, wenn in (40) d_{\max} nach (37) durch

$\frac{E_S - E_T}{E}$ ausgedrückt wird, wo unter E wegen des geringen Unterschiedes zwischen E_S und E_T jeder der beiden Werte verstanden werden kann,

$$E(\omega) = E_T + (E_S - E_T) \frac{\omega^2}{\omega^2 + \omega_1^2}. \quad (42)$$

Die Theorie stimmt sehr gut mit Messungen überein, vgl. z. B. [3] und [33].

4.12 Die Dämpfung durch makroskopische elektromagnetische Wirbelströme in ferromagnetischen Materialien

Schwingende Ferromagnetika erzeugen magnetische Wechselfelder, die infolge der Magnetostraktion wieder mechanische Wechselspannungen hervorrufen. Gleichzeitig induzieren sie elektrische Wirbelströme. Die von diesen erzeugte Wärme wird der Schwingungsenergie entzogen und bewirkt so Dämpfung. Nach Zener [32] kann die theoretische Behandlung dieser magnetischen Dämpfung in fast derselben Weise erfolgen wie die der thermischen Dämpfung. An die Stelle der Temperatur tritt die magnetische Feldstärke \mathfrak{H} an die Stelle der Entropie der 4π -te Teil der magnetischen Induktion \mathfrak{B} , und die Wärmeleitungsgleichung (32) wird durch die aus den Maxwell'schen Gleichungen folgende Gleichung

$$\text{rot rot } \mathfrak{H} = - \frac{4\pi\sigma}{c^2} \mathfrak{B} \quad (43)$$

(σ = elektrische Leitfähigkeit) ersetzt. Ein Unterschied besteht jedoch in den Randbedingungen.

Die Feldlinien, die im Innern des Stabes parallel zu dessen Achse laufen, haben auch in der Nähe der Oberfläche außerhalb desselben diese Richtung, so daß auf dem Umfang die Komponente der Feldstärke in Richtung der Stabachse, die in (43) allein eine Rolle spielt, $H_z = \text{const.}$ ist. Die Konstante kann Null gesetzt werden, und man kann schließlich analog zu (40) schreiben:

$$\mathfrak{d} = \pi \frac{E_B - E_H}{E_B} f(\mathfrak{z}) \quad (44)$$

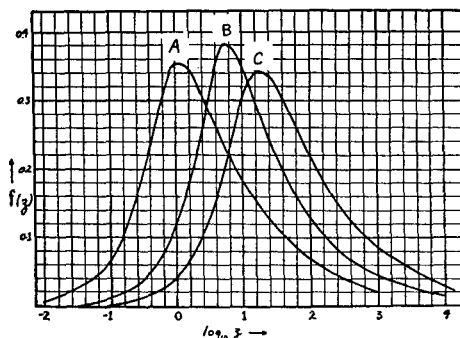


Abb. 4. Die Funktion $f(\mathfrak{z})$ nach ZENER [32]

- A. Biegeschwingungen eines Stabes, $\mathfrak{z} = 4 \cdot 10^{-9} \pi \sigma \mu d^2 \omega$.
 B. Longitudinalschwingungen eines runden Stabes, $\mathfrak{z} = 4 \cdot 10^{-9} \pi \sigma \mu R^2 \omega$.
 C. Biegeschwingungen eines runden Stabes, $\mathfrak{z} = 4 \cdot 10^{-9} \pi \sigma \mu R^2 \omega$.

σ in $\Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$, R und d in cm, ω in sec^{-1} , $\mu = \left(\frac{\partial B_z}{\partial H_z} \right)_{e_{zz}}$

Darin ist E_B der Elastizitätsmodul bei konstanter Induktion B_z und E_H der bei konstanter Feldstärke H_z . Die Funktion $f(\lambda)$, in der λ proportional ω ist, ist für die drei Fälle: Biege- und Längsschwingungen eines kreisrunden Stabes mit dem Halbmesser R und Biegeschwingungen eines Stabes mit rechteckigem Querschnitt von der Dicke d in Abb. 4 dargestellt. Zu beachten ist hier, daß infolge der anderen Randbedingungen bei den Längsschwingungen das Maximum der Dämpfung durch R und nicht wie bei der Temperaturdämpfung durch die Wellenlänge l bestimmt ist.

4.2 Formunabhängige Effekte

Die formunabhängige Dämpfung besteht aus einer Vielzahl von Relaxationserscheinungen, die einer von der Frequenz ziemlich unabhängigen Dämpfung überlagert sind. Die Relaxationsschwingungen sind am deutlichsten bei Metallen und metallähnlichen Stoffen ausgeprägt, wo sie die frequenzunabhängige Dämpfung fast vollkommen überdecken, während diese letztere bei Nichtmetallen innerhalb weiter Frequenzbereiche die Hauptrolle spielt. Sie ist eng verwandt mit der logarithmischen Nachwirkungsfunktion, die meistens durch eine geeignete Spektralverteilung ($N(\nu)$) im wesentlichen proportional zu ν^{-1}) gedeutet wird, wie z. B. bei Becker, der gleichzeitig an Stelle der rein formalen Deutung durch Maxwellelemente die Dämpfung und Relaxationen auf Inhomogenitäten des Materials zurückführt und so eine Erklärung aus dem Aufbau der Materie versucht. Sehr fruchtbar erwiesen sich die Gedanken Prandtls, der ebenfalls den molekularen Aufbau der Materie betrachtet und so die häufig vorkommende Hysterese der viskoelastischen Stoffe erklären kann. Außerdem sollen aber auch die Moleküle unter dem Einfluß einer äußeren Spannung ihre Plätze infolge ihrer Wärmebewegung vertauschen können, wodurch die elastische Nachwirkung und Relaxation zustande kommt. Die Prandtl'schen Gedanken konnte Eyring in eine einfache mathematische Form kleiden. Er gelangte zu einer nichtlinearen Gleichung, die für sehr kleine Spannungen das Maxwell'sche Gesetz (6) und für sehr große Spannungen ein logarithmisches Relaxationsgesetz als Grenzfälle enthält. Obwohl diese Theorie noch viele Fragen ungeklärt läßt, gibt sie einen guten Einblick in das Wesen der verschiedenartigen, später zu beschreibenden Relaxationsprozesse und erlaubt es, diese unter einem allgemeinen Gesichtspunkt zusammenzufassen. Es soll daher im folgenden die ältere Beckersche Theorie kurz beschrieben und dann die Prandtl-Eyringschen Gedankengänge ausführlich behandelt werden.

4.21 Die allgemeinen molekularen Theorien der Relaxation

4.211 Die Beckersche Theorie

Becker [1] nimmt, einer älteren Arbeit v. Wartenbergs folgend, an, daß der Körper plastisch inhomogen in dem Sinne ist, daß Teilchen größerer und geringerer Deformierbarkeit regellos nebeneinander liegen. Jedes einzelne der leicht deformierbaren (plastischen) Teilchen ist umgeben von solchen, die sich während der Versuchsdauer vollkommen elastisch verhalten. Während einer Belastung werden die am leichtesten deformierbaren Teilchen sich allmählich entspannen oder „fließen“ und damit eine Verlängerung bewirken. Wenn man den Bereich der Nachwirkung nicht überschreiten und eine

plastische Deformation des Materials vermeiden will, darf man den Belastungsversuch nur so weit ausdehnen, daß jedes merklich geflossene Teilchen noch von solchen umgeben ist, welche sich während der Versuchsdauer nicht merklich entspannt haben. Wenn jetzt entlastet wird, wird auf jedes geflossene Teilchen durch die sich elastisch kontrahierende Umgebung eine der ursprünglichen Spannung entgegengesetzte ausgeübt, unter deren Wirkung seine erste plastische Deformation rückgängig gemacht wird, so daß der Ausgangszustand wieder hergestellt ist. Wurde die Belastung jedoch so lange fortgesetzt, daß größere nebeneinander liegende Gruppen von Teilchen geflossen sind, so werden diese nach der Entlastung nicht mehr vollkommen zurückgeschoben werden können, da sie auf ihre Umgebung deformierend einwirken. Die Folge ist eine bleibende plastische Deformation.

Wirkt auf den Körper die Last P , so würde bei rein elastischem Verhalten die Spannung σ aller Teilchen den gleichen Betrag

$$\sigma_0 = c \cdot P$$

besitzen, wo c eine Konstante ist. Ist ein Teilchen geflossen, so herrscht in seiner Umgebung die Spannung σ . Die Differenz $\sigma_0 - \sigma$ ist ein Maß für den Betrag, um welchen das Teilchen sich am Tragen der Last zu wenig beteiligt und welcher bei konstant gehaltener Gesamtlast P durch die übrigen Teilchen des Querschnittes aufgenommen werden muß. Infolge dieses Spannungsdefektes wird somit der Körper gegenüber der rein elastischen Dehnung

$$y = \frac{P}{E}$$

um einen gewissen zu $\sigma_0 - \sigma$ proportionalen Betrag

$$\Delta y = \frac{\lambda}{E} (\sigma_0 - \sigma)$$

zu lang erscheinen (λ eine Konstante). Die wirkliche momentane Länge ergibt sich durch Summation beider Beträge zu

$$y(t) = \frac{1}{E} \left\{ P(t) + \lambda \sum_1^N (\sigma_0 - \sigma) \right\}, \quad (45)$$

wo die Summation über die Spannungsdefekte aller N geflossenen Teilchen zu erstrecken ist.

Die Änderung $d\sigma$ der Spannung mit der Zeit soll sich aus zwei Anteilen zusammensetzen, von denen der eine der jeweils herrschenden Spannung proportional ist und der zweite nur bei veränderlicher Spannung auftritt und der Spannungsänderung proportional ist. Die plastischen Materialteilchen sind also genau so aufgebaut wie Maxwellelemente. Damit verläuft die Rechnung wie im Abschnitt 3.14, wenn noch zusätzlich angenommen wird, daß nicht allen Teilchen derselbe Wert ν zukommt, sondern daß $f(\nu) d\nu$ Teilchen einen Wert ν besitzen, der zwischen ν und $\nu + d\nu$ liegt. Um das durch die Experimente geforderte logarithmische Nachwirkungsgesetz (29) und die damit gleichbedeutende frequenzunabhängige Dämpfung zu erhalten, braucht nach (28) $f(\nu)$ nur im wesentlichen, d. h. zwischen einem sehr kleinen Wert ν_1

und einem sehr großen Wert ν_2 , proportional zu ν^{-1} gesetzt zu werden. Unter Mitführung eines weiteren Gliedes folgt

$$\operatorname{tg} \varphi \approx \frac{\pi}{2} \beta \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctan \frac{\omega}{\nu_2} \right)$$

Bei genügend kleinen Frequenzen, die bei mechanischen Schwingungen immer vorliegen dürften, kann der zweite Summand gegen 1 vernachlässigt werden, die Dämpfung ist frequenzunabhängig. Für große Frequenzen ω geht $\operatorname{tg} \varphi$ wie ω^{-1} gegen Null.

In einer weiteren Verfeinerung seiner Theorie versucht Becker auch noch eine Erklärung für die Abhängigkeit der Schwingungsdämpfung von der Amplitude zu geben. Er nimmt dazu an, daß die scheinbar kontinuierliche plastische Deformation aus einzelnen Sprüngen besteht, und unterteilt die Dehnung in eine spontane Entspannung und darauf folgende makroskopische Verlängerung. Die spontane Entspannung geht nicht über den ganzen Querschnitt, sondern ist nur auf eng begrenzte Teilchen beschränkt. Die angehängte Last wird durch die überwiegende Zahl der nicht springenden Teilchen gehindert, das entspannte Teilchen unter Spannung zu setzen. Es bleibt spannungslos, die Spannung in der Umgebung wächst und verlängert den Körper.

Dafür, daß sich ein Teilchen in der Zeit dt entspannt, wird eine gewisse Wahrscheinlichkeit dw angenommen, die eine Funktion der Spannung σ_0 ist. Die Anzahl der entspannten Teilchen ist dann von σ_0 abhängig, so daß σ_0 in die Funktion f eingeht. Die Nachwirkungskurve kann Becker bestimmen. Da er aber über die Funktion $dw = dw(\sigma_0)$ keine Aussagen machen kann, erhält er auch keine bestimmte Aussage über die Abhängigkeit der Nachwirkungsfunktion von σ . Bei periodischer Beanspruchung läßt sich die Rechnung wegen mathematischer Schwierigkeiten jedoch nicht durchführen, es läßt sich aber qualitativ abschätzen, daß mit wachsender Amplitude auch die Dämpfung zunehmen muß, wie das auch beobachtet wird.

4.212 Die Prandtlsche Theorie

Prandtl [19 und 20] geht von der auch mehrfach von anderer Seite benutzten Hypothese aus, daß für Hysterese und Nachwirkung bei Kristallhaufwerken in erster Linie die Verwachsungsstellen der einzelnen Kristallite und Störungen des regelmäßigen Gitters verantwortlich sind. Zwischen zweien solcher Gitter befinden sich einige Moleküle, die, ohne dem festen Gitterverband anzugehören, unter dem Einfluß der Anziehungs- und Abstoßungskräfte der beiden Gitter stehen. Sie sind an dem einen Gitter fester angebunden als an dem anderen. Um zu einer bestimmten Vorstellung zu gelangen, kann man auch annehmen, daß sie an dem einen der beiden Gitter elastisch befestigt sind und daß bei einer Formänderung das Kraftfeld des anderen Gitters an den elastisch befestigten Molekülen vorbeizieht und diese dabei in wechselnde Gleichgewichtslagen bringt. Als letzte Vereinfachung kann man sich zwei gegeneinander verschiebbliche Lineale vorstellen, von denen das eine (A) in regelmäßigen oder unregelmäßigen Abständen mit sehr vielen elastisch gelagerten Massenpunkten besetzt ist, die parallel zur Linealachse schwingen können, während das zweite Lineal (B) ein Kraftfeld trägt,

wie es einem irgendwie schräg abgeschnittenen Gitter entsprechen mag. Die Komponenten dieses Kraftfeldes in der Bewegungsrichtung wechseln im Abstand zweier Moleküle jeweils zweimal das Vorzeichen. Wenn die elastische Kraft einen kleineren Gradienten als das Kraftfeld hat, dann werden günstig liegende Moleküle bei der Verschiebung von B auf A zunächst vom Kraftfeld mitgenommen, geraten aber später in eine labile Lage, von der aus sie in eine andere Gleichgewichtslage schnellen. Man kann sich als Modell etwa eine wellenförmige Fläche (Lineal B) denken, auf der eine Kugel liegt, die durch Federn mit geeigneter Federkonstante in der in Abb. 5 gezeigten Weise an einem Lineal (A) befestigt ist. Ihre stabile Lage ist in einem Wellental. Wird das Lineal A nach rechts verschoben, so bleibt sie hinter der Verschiebung

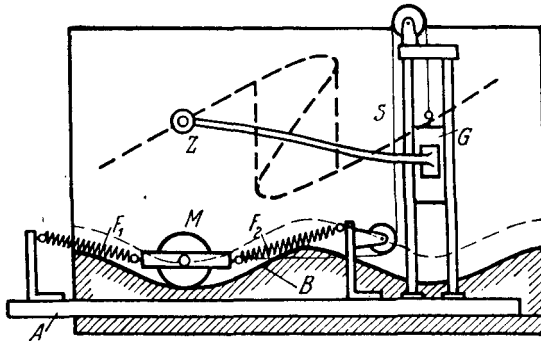


Abb. 5. Prandtl'sches Hysteresismodell, nach Prandtl [19].

des Lineals zurück, übt also eine elastische, der Deformation entgegengesetzte Kraft aus. Wird das Lineal so weit verschoben, daß sie auf einem Wellenberg zu liegen kommt, so gerät sie in eine labile Lage und rutscht bei weiterer Verschiebung schließlich in das nächste Wellental. Wird das Lineal jetzt rückwärts nach links verschoben, so übt sie eine entgegengesetzte, elastische Kraft aus, bis sie wieder auf den Wellenberg kommt und dann wieder in ihre alte Gleichgewichtslage zurückfällt. Das Kraft-Weg-Diagramm in Abb. 5 zeigt auf dem Hinweg eine andere Kraft als auf dem Rückweg. Es wird eine Hysteresisschleife umlaufen.

An den Grenzflächen der Kristallite gibt es jetzt sehr viele derartige Kraftfelder (Wellenbahnen) mit den verschiedensten Wellenlängen und ebenso sehr viele Moleküle (Kugeln), die mit den verschiedensten Kräften an ihre Gleichgewichtslagen gebunden sind. Diese Moleküle liegen im ausgeruhten Zustand nicht alle in den Wellentälern, sondern kommen, da die Teilungen inkommensurabel sind, an die verschiedensten Stellen zu liegen; so wird ein Teil μ links von einem Tal, d. h. auf dem einen Ast der Schleife, und der andere Teil $1 - \mu$ rechts von einem Wellental, d. h. auf dem anderen Ast der Schleife liegen. In dem eindeutigen Teil der Kraftkurven ist natürlich $\mu = 1$.

Einen Überblick über die bei einer großen Anzahl von Molekülen ein und derselben Art entstehende Summenkraft kann man erhalten, wenn man die einzelnen Federkräfte senkrecht über den Ruhelagen der einzelnen Massen-

teilchen aufträgt. An jeder Stelle der Kraftkurve liegen im Mittel gleich viele Moleküle. Im spannungslosen Anfangszustand (wie er etwa durch Ausglühen erreicht gedacht werden kann, wobei durch langsam abnehmende heftige Wärmebewegung jedem Teilchen Gelegenheit geboten wird, seine stabilste Lage aufzusuchen) ergibt sich dann die Abb. 6. Die resultierende Kraft ist durch die schraffierte Fläche dargestellt und ist hier Null. Bei einer geringen Verschiebung um das Stück ξ nach rechts erhält man Abb. 7. Die ganz rechts

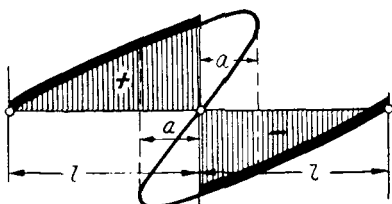


Abb. 6. Kraftverlauf beim Prandtl'schen Modell, nach Prandtl [19].

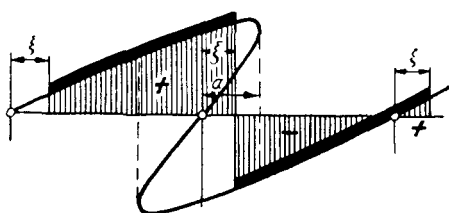


Abb. 7. Kraftverlauf beim Prandtl'schen Modell nach Verschiebung, nach Prandtl [19].

hinzugekommene Belegung kann dabei auf das linke Ende umgelegt werden, so daß sich die äußeren Grenzen der Belegung nicht ändern. Im Innern hat sich aber die positive Fläche vergrößert und die negative verkleinert, es ist also eine positive Kraft entstanden, die ungefähr proportional der Verschiebung ist. Sie kann aber nur so lange weiter anwachsen, bis die ersten Moleküle an der Stelle a angekommen sind und auf den andern Ast der Kurve herabfallen. Von da ab kann keine neue Fläche mehr hinzukommen, und die Kraft bleibt konstant. Wenn jetzt aber Linksbewegung einsetzt, nimmt sie sofort ab, wird bei einer Verschiebung um das Stück a nach links Null und erreicht bei einer Verschiebung um das Stück $2a$ den entgegengesetzt gleichen maximalen Wert, der bei weiterer Verschiebung nicht überschritten werden kann. Es entsteht so eine spezielle Hysteresisschleife (siehe Abb. 8). Die typische, allgemein beobachtete Form wird aus dieser einfachen Art erhalten, wenn man die Summenwirkung von vielen Modellen verschiedener Härte betrachtet*).

Die Verluste bei einem Umlauf der Schleife sind durch den Flächeninhalt der Schleife gegeben und unabhängig von der Umlaufgeschwindigkeit, d. h. bei Schwingungen von der Frequenz. Es ist aber damit zu rechnen, daß sie sehr stark von der Maximalverschiebung, bei Schwingungen also von der Amplitude, abhängen.

Die Moleküle liegen aber nicht an ihren Plätzen fest, sondern schwingen infolge ihrer Wärmebewegung um ihre Gleichgewichtslage hin und her. Wenn die Energie dieser Schwingungsbewegung einen gewissen Grenzbetrag U_1

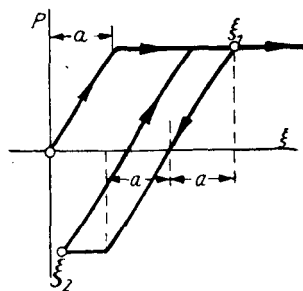


Abb. 8. Hysteresisschleife nach Prandtl [19].

*) Die wesentlichen Folgerungen aus dieser Theorie konnten, allerdings in einem andern Maßstabe als für akustische Schwingungen gültig, von Braunbeck [6] an einem pechartigen Stoff bestätigt werden.

überschreitet, kann es vorkommen, daß einzelne Moleküle über die labile Lage hinausschwingen und dabei auf den anderen Ast der Kraftkurven gelangen. Die Wahrscheinlichkeit W des Auftretens einer den Betrag U_1 überschreitenden Energie ist nach der kinetischen Theorie der Wärme

$$W = e^{-U_1/U_m}$$

wo $U_m = kT$ (k = Boltzmannsche Konstante) ein bestimmter Mittelwert der Schwingungsenergie des Teilchens ist.

Die Zeit, innerhalb welcher eine Verteilung der Schwingungsenergie in eine andere davon unabhängige übergeht, werde mit τ bezeichnet; sie dürfte von der Größenordnung der Schwingungszeit der Teilchen sein. Von dem Anteil μ der Teilchen auf dem ersten Ast wird in ihr der Bruchteil $\mu \exp(-U_1/U_m)$ und von dem Anteil $1 - \mu$ der Teilchen auf dem andern Ast der Bruchteil $(1 - \mu) \exp(-U_2/U_m)$ auf den ersten Ast überspringen, in der Zeiteinheit der τ te Teil davon. Die Änderung in der Zeiteinheit ist also

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{\tau} \left[(1 - \mu) e^{-\frac{U_2}{U_m}} - \mu \cdot e^{-\frac{U_1}{U_m}} \right]. \quad (46)$$

Für den Fall der einfachen Relaxation, in welchem eine Bewegung nicht stattfindet, läßt sich Gleichung (46) leicht zu

$$\mu = \frac{e^{-U_1/U_m}}{e^{-U_1/U_m} + e^{-U_2/U_m}} + \psi(x) \cdot \exp \left\{ -\frac{t}{\tau} (e^{-U_1/U_m} + e^{-U_2/U_m}) \right\} \quad (47)$$

integrieren ($\psi(x)$ eine durch die Verteilung $\varphi(x)$ zur Zeit $t = 0$ festgelegte Funktion). Bei einigermaßen festen Körpern kommen gleichzeitige Sprünge nach unten und nach oben nicht in Betracht, da die der anderen Art jeweils zu große Energie erfordern und daher äußerst selten sind. In solchen Fällen kann man

$$\mu = \varphi(x) \cdot \exp \left(-\frac{t}{\tau} e^{-U_1/U_m} \right) \quad (48)$$

schreiben.

Durch verhältnismäßig rohe Annahmen über die Energie U_1 , die einem an der Stelle x liegenden Molekül erteilt werden muß, damit es über den bei a liegenden Sprungpunkt hinausschwingen kann, nämlich eine zu $x - a$ proportionale lineare Annahme, läßt sich zeigen, daß die Gesamtkraft

$$P = \text{const} \cdot \int_0^a \mu dx$$

ist. Wird hierin für μ der Wert (48) eingesetzt, so folgt für P ein logarithmisches Gesetz

$$P = \text{const} \cdot T \cdot \left[\int_0^1 \ln(-\ln \mu) d\mu + \ln x - \ln t \right] + \text{const.}$$

Bei hohen Temperaturen sind auch die umgekehrten Sprünge mitzuberechnen. Eine Durchrechnung dieses Falles ist sehr schwierig, jedoch kann hier abgeschätzt werden, daß die Kraft wie $e^{-2t/\tau}$ abnimmt, daß sich also

die Maxwellsche Formel mit der Relaxationszeit $\tau/2$ ergibt, die jetzt wieder auf mehrere Relaxationszeiten ausgedehnt werden kann.

Die Prandtlsche Vorstellung führt also bei niedrigen Temperaturen zu dem oft beobachteten logarithmischen Relaxationsgesetz, bei hohen Temperaturen dagegen zu dem exponentiellen Maxwellschen Gesetz. Der Begriff: hohe und tiefe Temperaturen dürfte sich dabei auf die geringe oder große Entfernung vom Schmelzpunkt beziehen. Die Ergebnisse dürfen aber nicht auf sehr hohe Frequenzen angewandt werden, da die Relaxationsbetrachtungen sich nicht auf die sehr kleinen Zeiten unmittelbar nach dem Anbringen der Last erstrecken.

4.213 Die Eyringsche Formel

Die Überlegungen Prandtls wurden von Eyring und Tobolsky [8, 10, 27, 28] durch Anwendung der von Eyring für chemische Prozesse ausgebauten Theorie der Reaktionsgeschwindigkeiten (reaction rate theory) verbessert und in eine übersichtlichere mathematische Form gebracht. Es gelang ihnen, eine nicht-lineare Beziehung zwischen Spannung und Spannungsänderung und der Verformungsgeschwindigkeit zu finden, aus der durch Vernachlässigung für hohe Temperaturen das Maxwellsche Gesetz (6) und für tiefe Temperaturen ein logarithmisches Relaxations- und Kriechgesetz abgeleitet werden kann.

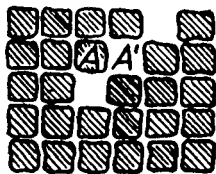


Abb. 9. Störungsstelle im Kristallgitter.

Auch Eyring und Tobolsky gehen davon aus, daß die Atome eines Gitters oder die Moleküle einer amorphen Masse im Gleichgewicht sich an Stellen aufhalten, an denen das von den anderen Atomen und Molekülen herrührende Kraftfeld ein Minimum des Potentials hat. Es brauchen nun nicht alle Minima

von einem Atom oder Molekül besetzt zu sein. Das ist wieder besonders in der Nähe von Störungen der Fall. So befindet sich neben der Stelle, an der sich das Atom A in Abb. 9 befindet, bei A' ebenfalls ein Potentialminimum. Der Raum zwischen A und A' ist jedoch durch eine höhere potentielle Energie gekennzeichnet. Nur wenn dem Atom in A eine Energie erteilt wird, die größer als der zwischen A und A' liegende Potentialwall ist, kann das Atom von A nach A' hinüberspringen. Dabei wird sich im Gleichgewichtszustand das Potential in A nicht wesentlich von dem in A' unterscheiden, so daß sich das Atom mit der gleichen Wahrscheinlichkeit in A wie in A' aufhält. Wären die beiden Potentiale in A und A' sehr voneinander verschieden, so würde sich das Atom nur an der Stelle niederen Potentials aufhalten; solche Stellen scheiden für die folgenden Betrachtungen aus. Die Energie, die das Atom befähigt, gelegentlich aus dem einen Potentialtopf in einen anderen zu springen, kann es aus der Wärmebewegung der Moleküle erhalten.

Ähnliche Verhältnisse liegen auch bei nicht-kristallinen Körpern vor, die Potentiale sind hierbei nur anderer Art.

Die Symmetrie in bezug auf den Wert des Potentials in den Punkten A und A' fällt fort, wenn dem Körper von außen her eine Spannung aufgeprägt wird. Dann überlagert sich der Potentialkurve AA' ein weiteres Potential,

das entsprechend einer konstanten Spannung als gerade Linie angenommen werden kann. Die Überlagerung beider Potentiale hat zur Folge, daß das Minimum vom Punkt A in einen dicht danebenliegenden Punkt A^* verschoben wird (siehe Abb. 10), das sind die elastischen Verformungen des Körpers. Außerdem wird jetzt das eine der beiden Minima, in der Zeichnung das bei A' , tiefer als das andere, die Höhe des Potentialwalls wird von A aus gesehen erniedrigt und von A' aus gesehen erhöht. Infolgedessen wird sich das Atom bevorzugt in der Lage A' aufhalten.

Zur rechnerischen Erfassung dieser Gedankengänge werde das Potential im ungestörten Zustand durch die Funktion

$$\Phi_1 = \frac{\Delta E}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right)$$

angenähert. x ist die Koordinate längs des Schnittes $A A'$, ΔE die Höhe des Potentialwalls und λ der Abstand der beiden Punkte A und A' . Diesem Potential überlagert sich im gespannten Zustand das zur Schubspannung σ gehörende Potential (siehe Abb. 10)

$$\Phi_2 = -\sigma \lambda_2 \lambda_3 x.$$

λ_2 und λ_3 sind die Seiten des Rechtecks, an dem die Spannung σ angreift. Beide Längen sind etwa von der Größenordnung eines Atomabstandes. Das Gesamtpotential ist dann

$$\Phi = \frac{\Delta E}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right) - \sigma \lambda_2 \lambda_3 x.$$

Die neue Gleichgewichtslage ist durch das Minimum dieser Funktion gegeben, das bei

$$x_{\min} = \frac{\lambda}{2\pi} \arcsin \frac{\sigma \lambda_2 \lambda_3}{\pi \Delta E}$$

liegt. Für geringe Spannungen $\frac{\sigma \lambda_2 \lambda_3}{\pi \Delta E} \ll 1$ wird daraus

$$x_{\min} = \frac{\sigma \lambda^2 \lambda_2 \lambda_3}{2\pi^2 \Delta E}. \quad (49)$$

Wenn λ_1 der Abstand zweier Schichten ist, so wird der Schub (Abb. 11) $\gamma = \frac{x_{\min}}{\lambda_1}$ und die Schubgeschwindigkeit $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{\lambda_1} \frac{dx_{\min}}{dt}$. Zu diesem Wert ist nun noch die Verschiebung der Atome durch die Sprünge hinzuzuaddieren. Springt im Durchschnitt ein Molekül K_v mal in der Zeiteinheit von A nach A' und K_r mal in der entgegengesetzten Richtung, so ist, da jeder Sprung die Weite λ hat, die Gesamtgeschwindigkeit der Moleküle $(K_v - K_r) \lambda$, und die gesamte Schubgeschwindigkeit wird

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{\lambda_1} \frac{dx_{\min}}{dt} + \frac{\lambda}{\lambda_1} (K_v - K_r). \quad (50)$$

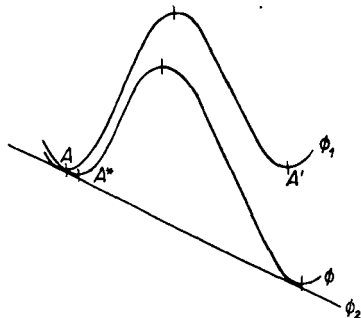


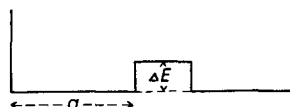
Abb. 10. Potentialwall.

Die Größe K folgt aus der Theorie der Reaktionsgeschwindigkeiten zu

$$K = \frac{k T}{h} e^{-\frac{\Delta E}{k T}}, \quad (51)$$

wo k die Boltzmannsche, h die Plancksche Konstante, T die absolute Temperatur und ΔE die Aktivierungsenergie, d. h. diejenige Energie ist, die das Atom zum Überspringen des Potentialwalls benötigt.

Ein zwingender Grund für die Einführung der Planckschen Konstante besteht wahrscheinlich nicht; denn in dem hier gegebenen Rahmen müßte man die Viskosität ebenso wie die der Gase auch ohne Zuhilfenahme der Quantenmechanik erklären können. Da (51) aber für chemische Vorgänge abgeleitet worden ist, die sich in der Elektronenhülle des Atoms abspielen, und man dort ohne quantenmechanische Gedankengänge nicht auskommt, werden die dort erhaltenen Ergebnisse der Einfachheit halber ungeändert auf unser Problem übertragen. Die Beziehung (51) kann man sich am besten erklären, wenn

Abb. 11. Schubspannung σ .Abb. 12. Potentialwall ΔE .

man Moleküle der Masse m in einem rechteckigen Kasten betrachtet, der durch einen Wall der Höhe ΔE in zwei Teile geteilt sei. Die Anzahl K der in der Zeiteinheit von dem einen Teil des Kastens in den anderen fliegenden Teilchen ist dann sowohl der Konzentration c der Teilchen, die die dazu notwendige Energie besitzen, wie auch der mittleren Geschwindigkeit der Teilchen proportional:

$$K = c \cdot \bar{x}. \quad (52)$$

Aus der Boltzmannschen Geschwindigkeitsverteilung folgt aber:

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{k T}{2 \pi m}}. \quad (53)$$

Die Anzahl der Atome in einem eindimensionalen Kasten der Länge a (Abb. 12) mit genügend großer Energie zum Überspringen des Walles ist

$$a \cdot c = \int_{\Delta E}^{\infty} e^{-\frac{E_n}{k T}} d n.$$

Hierin ist das Summenzeichen, das bei der quantentheoretischen Betrachtung stehen müßte, bereits durch ein Integral ersetzt worden, da die Höhe des Potentialwalles ΔE , von der aus zu summieren ist, als groß gegenüber den einzelnen Energiestufen $d n$ angesehen werden kann. E_n ist die zur n ten Energiestufe gehörige Energie. Wird ΔE als Nullniveau der Energie genommen, aus jedem Wert E_n also der Bestandteil ΔE ausgeklammert, so kann auch geschrieben werden:

$$a c = e^{-\frac{\Delta E}{k T}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{E_n}{k T}} d n.$$

Die zur n ten Stufe gehörige Energie ist für ein Atom mit einem Freiheitsgrad, das sich in einem Kasten der Länge a befindet*),

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8a^2 m}, \quad (54)$$

und damit wird

$$c \neq \frac{\sqrt{2\pi m k T}}{h} e^{-\frac{\Delta E}{k T}}.$$

Zusammen mit (52) und (53) ergibt sich so (51).

Für die vorwärts springenden Teilchen ist die Höhe des Potentialwalles $\Delta E - \frac{\sigma \lambda_2 \lambda_3 \lambda}{2}$, wie sich aus einer Betrachtung der Abb. 10 oder aus einer genauen Rechnung für den Fall ergibt, daß $\frac{\sigma \lambda_2 \lambda_3 \lambda}{\Delta E} \ll 1$ und Quadrate vernachlässigt werden können. Ebenso ist für die rückwärts springenden Teilchen die Höhe des Potentialwalles $\Delta E + \frac{\sigma \lambda_2 \lambda_3 \lambda}{2}$. Damit wird aus (50) die nicht-lineare Differentialgleichung

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\lambda^2 \lambda_2 \lambda_3}{2\pi^2 \lambda_1 \Delta E} \cdot \frac{d\sigma}{dt} + 2 \frac{\lambda}{\lambda_1} \cdot \frac{k T}{h} e^{-\frac{\Delta E}{k T}} \sin \frac{\lambda_2 \lambda_3 \lambda}{2 k T} \sigma$$

oder, wenn der Einfachheit halber angenommen wird, daß die Längen λ , λ_1 , λ_2 und λ_3 alle gleich einem Atomabstand λ sind, und die Elastizitätskonstante $G = \frac{2\pi^2 \Delta E}{\lambda^3}$ eingeführt wird,

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{G} \cdot \frac{d\sigma}{dt} + 2 \frac{k T}{h} e^{-\frac{\Delta E}{k T}} \sin \frac{\lambda^3 \sigma}{2 k T}. \quad (56)$$

Für den Fall, daß $\frac{\lambda^3 \sigma}{2 k T}$ so klein ist, daß der \sin durch sein Argument ersetzt werden kann, für den Fall also, daß entweder genügend kleine Spannungen σ oder genügend hohe Temperaturen T vorliegen, geht diese Gleichung in die lineare Maxwellsche Gleichung (6) mit $\eta = \frac{h}{\lambda^3} e^{\frac{\Delta E}{k T}}$ über. Daraus folgt für die Relaxationszeit

$$\tau = \frac{\eta}{G} = \frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{h}{\Delta E} e^{\frac{\Delta E}{k T}}. \quad (57)$$

Ist σ nicht mehr so klein, daß (56) linearisiert werden kann, so wird bei Schwingungen $\gamma = \gamma_0 \cdot \cos \omega t$ die Dämpfung auch von der Schwingungsamplitude γ_0 abhängig. Wird die Lösung von (56) nach γ_0 entwickelt und nach dem 2. Glied abgebrochen, so wird

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi_0 \left[1 + \frac{\beta^2}{(1 + \alpha^2)^2} \left(1 + 2\alpha^2 - \frac{2}{3\alpha} \cdot \frac{9 + 17\alpha^2}{9 + \alpha^2} \operatorname{tg} \varphi_0 \right) \right].$$

*) Denn die Lösung der eindimensionalen Schrödingerschen Gleichung

$$E\psi + \frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = 0, \quad (55)$$

die den Randbedingungen genügt, daß $\psi = 0$ für $x = 0$ und $x = a$ wird, ist

$$\psi = C \cdot \sin \frac{n\pi x}{a},$$

und diese Lösung, in (55) eingesetzt, ergibt (54).

Hierin ist $\operatorname{tg} \varphi_0$ die aus der linearisierten Maxwell'schen Gleichung folgende und durch Gleichung (12) gegebene Dämpfung für $\gamma_0 \rightarrow 0$. G_2 ist der dem untersuchten Relaxationsmechanismus und G_1 der dem festen Skelett ($\tau_1 \rightarrow \infty$) entsprechende Elastizitätsmodul. α und β sind Abkürzungen für:

$$\alpha = 2\pi \cdot \frac{\Delta E}{h\omega} e^{-\frac{\Delta E}{kT}}, \quad \beta = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{\Delta E}{kT} \cdot \gamma_0. \quad (58)$$

γ_0 tritt quadratisch auf. Trägt man die Dämpfung über γ_0 auf (Abb. 13), so erhält man eine Parabel, wie sie experimentell auch häufig beobachtet wird. Mit kleiner werdendem γ_0 geht sie mit waagerechter Tangente gegen den Wert $\operatorname{tg} \varphi_0$, so daß mit genügend kleinem γ_0 die Dämpfung praktisch unabhängig von der Amplitude wird.

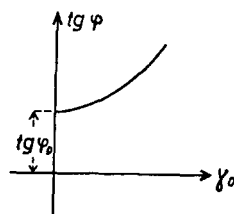


Abb. 13. Dämpfung als Funktion der Amplitude.

Für Relaxationsprozesse ($\frac{d\gamma}{dt} \equiv 0$) kann eine geschlossene Lösung von Gleichung (56) angegeben werden. Unter Benutzung der Abkürzungen

$$A = \frac{2kT}{h} e^{-\frac{\Delta E}{kT}} \quad \text{und} \quad B = \frac{\lambda^3}{2kT}$$

wird nämlich nach Trennung der Variablen

$$\int \frac{d\sigma}{\operatorname{Eg} B \sigma} = -A G t + \text{const}$$

und nach Integration

$$\operatorname{Eg} \frac{B \sigma}{2} = \operatorname{Eg} \frac{B \sigma_0}{2} e^{-A B G t}. \quad (59)$$

Für kleine Werte σ kann der Eg durch sein Argument ersetzt werden, und es folgt das exponentielle Maxwell'sche Relaxationsgesetz. Für große Werte $B \sigma = \frac{\lambda^3 \sigma}{2kT}$, also für große Schubspannungen σ oder niedrige Temperaturen T kann dagegen

$$\ln \operatorname{Eg} \frac{B \sigma}{2} = \ln \frac{1 - e^{-B \sigma}}{1 + e^{-B \sigma}} \approx -2 e^{-B \sigma}$$

gesetzt werden, und damit wird

$$e^{-B \sigma} \approx \frac{A B G}{2} t + \text{const}$$

oder

$$\sigma \sim -\frac{1}{B} \ln \left(\text{const.} + \frac{A B G}{2} t \right). \quad (60)$$

Man findet so wie bei Prandtl das logarithmische Relaxationsgesetz wieder.

Unter der Annahme eines festen Skeletts (vgl. Abschn. 3.13) läßt sich auch ein logarithmisches Kriechgesetz ausrechnen. Es gilt dann nämlich

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{G_1} \cdot \frac{d\sigma_1}{dt},$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{G_2} \frac{d\sigma_2}{dt} + A \sin B \sigma_2,$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma = \text{const.}$$

Durch Subtraktion der ersten beiden Gleichungen folgt

$$\frac{1}{G_\mu} \frac{d\sigma_2}{dt} = -A \sin B \sigma_2$$

mit

$$\frac{1}{G_\mu} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}.$$

Die Gleichung kann in derselben Weise wie oben integriert werden. Für $\frac{B \sigma_2}{2} \gg 1$ wird wieder

$$\sigma_2 \sim -\frac{1}{B} \ln A B G_\mu t$$

und

$$\gamma = \frac{\sigma - \sigma_2}{G_1} \sim \frac{\sigma}{G_1} + \frac{1}{B G_1} \ln A B G_\mu t.$$

Logarithmisches Relaxations- und Kriechgesetz führen auch hier wieder zu frequenzunabhängiger Dämpfung, da die Rechnungen des Abschnitts 3.14 unabhängig von der jeweiligen physikalischen Deutung sind.

Obwohl es so möglich zu sein scheint, auch die frequenzunabhängige Dämpfung ohne Annahme eines Relaxationsspektrums zu erklären, hält diese Deutung einer näheren Kritik doch nicht stand. Zwar lassen sich in einigen Fällen die Relaxationskurven durch Gleichung (59) sehr gut beschreiben, doch handelt es sich dabei stets um die sehr großen Verformungen von etwa 20% bis zu mehreren 100%, wie sie bei den gummielastischen Körpern möglich sind.

Da es offenbleiben kann, ob ein Spektrum nur eine bequeme, rein phänomenologische Rechenannahme ist oder ob ihm Realität etwa in der von Prandtl und Eyring gegebenen Weise zukommt, wird der Einfachheit halber meistens auf die Erklärung durch ein solches zurückgegriffen. Wegen

$$N(\nu) d\nu = \nu \cdot N(\nu) d \ln \nu = N'(\ln \nu) d \ln \nu$$

entspricht der Verteilung $N(\nu) = c/\nu$ (c eine Konstante, vgl. (28)) eine Verteilung $N'(\ln \nu) = \text{const.}$ Da der Logarithmus von ν angenähert gleich einem konstanten Vielfachen der Aktivierungsenergie ΔE ist (vgl. Gl. (57)), müßte man annehmen, daß sämtliche Werte ΔE zwischen zwei Grenzwerten ΔE_1 und ΔE_2 gleich häufig vorkommen, was bei den amorphen Körpern, bei denen hauptsächlich die frequenzunabhängige Dämpfung beobachtet wird, mindestens nicht unwahrscheinlich ist, zumal da wegen der exponentiellen Abhängigkeit von ΔE und ν einem sehr weiten Bereich von ν , in welchem das Gesetz $N(\nu) = c/\nu$ gelten müßte, um die Frequenzunabhängigkeit in einem entsprechend weiten Frequenzbereich zu erhalten, ein nur schmaler Bereich

von ΔE -Werten zugeordnet zu sein brauchte. (Ein Faktor von 10 in der Relaxationsfrequenz entspricht einer Änderung von 1,5 kcal/Mol in der Aktivierungsenergie.)

Falls die Darstellung durch ein Relaxationsspektrum zu Recht besteht, müßte es immer möglich sein, aus dem Verlauf der Relaxationskurve auf die Schwingungsdämpfung zu schließen. Es muß nämlich nach (27), (28) und (29)

$$E_2 = - \frac{\pi}{2 \cdot 2,303 \cdot \Delta y} \cdot \frac{d\sigma}{d \lg t}$$

sein. Daß man in dieser Weise die Dämpfung aus der Relaxationskurve herleiten kann, hatte schon Bennewitz [2] an Glas und einigen Metallen gezeigt. Dunell und Tobolsky [7] fanden an 14 natürlichen und künstlichen hochpolymeren Stoffen, daß die aus der Relaxationskurve errechneten Dämpfungswerte um höchstens eine Zehnerpotenz von den gemessenen abweichen. Dabei ist natürlich zu beachten, daß die Frequenzen, bei denen die Dämpfung gemessen wurde, höher waren als diejenigen, die den Meßzeiten der Relaxationskurve entsprechen würden.

4.22 Die verschiedenen Relaxationserscheinungen

Der von der Frequenz unabhängigen Dämpfung ist besonders bei den Metallen eine Reihe ziemlich ausgeprägter Maxima überlagert, die als spezielle Relaxationserscheinungen zu deuten sind. Zum Teil werden sie ebenso wie die thermische Wärmedämpfung (Abschn. 4.11) durch das Gesetz (13) beschrieben, bei dem ein einziger Dämpfungsmechanismus mit einer einzigen Relaxationszeit in einem ungedämpften Gerüst vorliegt. Oder man hat es mit mehreren nur wenig voneinander verschiedenen kontinuierlich verteilten Relaxationszeiten zu tun. Die Verteilungskurve zeigt hier ein ziemlich steiles Maximum, und die Dämpfungskurve ist der durch (13) gegebenen ähnlich, aber nach den Flanken etwas abgeflacht. Die Relaxationszeiten sind in den meisten Fällen nach dem Gesetz (57) von der Temperatur abhängig, so daß ihnen im Rahmen der Eyringschen Theorie bestimmte Aktivierungsenergien zuzuschreiben sind. Eine Übersicht über die einzelnen Relaxationserscheinungen gibt Zener [35]. Die wichtigsten unter ihnen sind die folgenden:

4.221 Die Dämpfung durch mikroskopische Wärmeströme

Örtliche Überdrucke und damit Temperaturerhöhungen neben Stellen, an denen durch Dehnung die Temperatur unter den Mittelwert erniedrigt wird, können überall da auftreten, wo das schwingende Material nicht vollkommen homogen ist. Solche Inhomogenitäten sind die einzelnen Kristallite, aus denen die Metalle aufgebaut sind, ebenso wie Hohlräume und Risse oder innere Spannungen, die bei zu starkem Abkühlen übrig geblieben sind. Wenn die einzelnen Kristalle verschieden orientiert sind, so werden sie bei Auftreten von Schubspannungen, bei denen die gesamte Kompression Null sein kann, auch verschieden stark erwärmt und geben zu Wärmeströmen Anlaß, die ihrerseits wieder als irreversibler Prozeß genau wie die makroskopischen Wärmeströme die Dämpfung bewirken.

Würde man es mit einheitlichen Kristallitgrößen zu tun haben, so wäre die Dämpfung durch das Gesetz (40) gegeben mit der Maximaldämpfung nach (38) oder (39). In beide Ausdrücke ist noch ein Faktor \mathfrak{R} einzufügen:

$$\mathfrak{d}_{\max} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{c_p - c_v}{c_v} \cdot \mathfrak{R} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{T}{c_p \cdot \varrho} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right)_T \left(\frac{\partial \theta}{\partial T} \right)_p^2 \mathfrak{R},$$

der den Bruchteil der gesamten Energie angibt, der in den Volumenänderungen liegt. Bestimmend für die Relaxationsfrequenz ω_1 ist aber nicht mehr eine Abmessung des Körpers wie in (41), sondern eine die Kristallitgröße kennzeichnende Länge L :

$$\omega_1 = \frac{2 \pi \lambda}{\varrho c L^2} \quad (61)$$

Praktisch haben die Kristallite aber keine einheitliche Größe, diese schwankt vielmehr innerhalb gewisser Grenzen um einen Mittelwert. Infolgedessen tritt

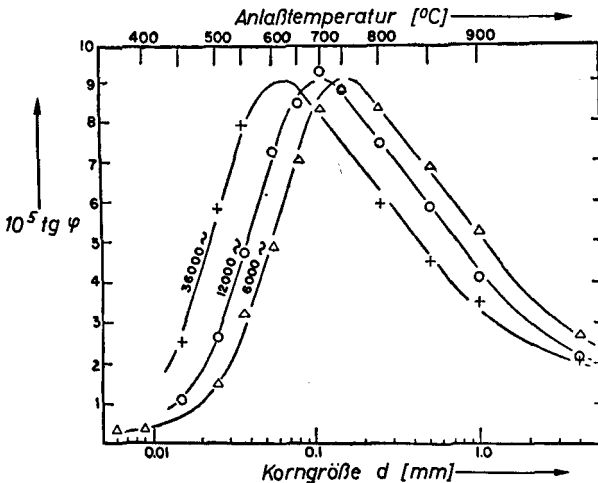


Abb. 14. Innere Reibung als Funktion der Korngröße d , hervorgerufen durch verschiedene Anlaßtemperaturen in Messing nach Randall, Rose u. Zener [21].

auch nicht eine einzige Relaxationsfrequenz auf, sondern man muß mit einer stetigen Verteilung rechnen, und die Kurve (40) ist durch eine ähnliche, nach den Seiten auseinandergezogene zu ersetzen, aus der rückwärts die charakteristische Funktion $N(\nu)$ erschlossen werden kann.

Die Gleichung (61) ist experimentell bestätigt [21 und 22], wobei sich L zu ungefähr $2/3$ der Korngröße d ergab (Abb. 14 und 15). Außerdem zeigte Aluminium, dessen elastische Anisotropie besonders klein ist, auch eine besonders kleine innere Reibung.

Bei einer Änderung der Frequenz ändert sich natürlich der Elastizitätsmodul auch wieder genau wie bei der makroskopischen thermischen Dämpfung. Bei niedrigen Frequenzen ist er gleich dem für isotherme Schwingungen und bei hohen gleich dem für adiabatische Schwingungen.

Sind in einem Material innere Spannungen vorhanden, so werden diese nach Anlegen einer äußeren Spannung an einzelnen Stellen erhöht, an anderen

dagegen erniedrigt, ohne daß eine makroskopische Dilatation stattfindet. Zwischen den Stellen erhöhter und erniedrigter Spannung fließt auch wieder Wärme über.

Die Tatsache, daß die Korngröße ebenso wie die inneren Spannungen von der Bearbeitung des Materials abhängen, erklärt auch den großen Einfluß, den diese auf die Dämpfung hat und der einen Vergleich der von verschiedenen

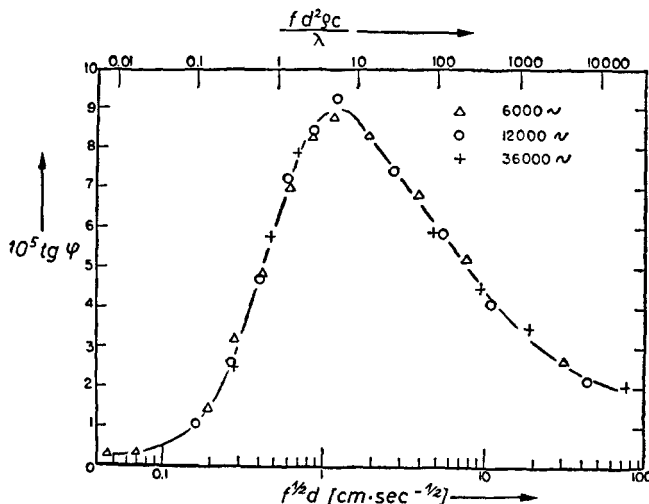


Abb. 15. Die Messungen von Abb. 14 als Funktion der Größe $f^{1/2} d$.

Autoren gemessenen Dämpfungskurven häufig unmöglich macht. Im allgemeinen sinkt die innere Reibung nach Erwärmen auf verhältnismäßig niedrige Temperaturen ab, da hierdurch die inneren Spannungen aufgehoben werden. Nach Erhitzen auf hohe Temperaturen kann jedoch eine erheblich stärkere Zunahme der inneren Reibung durch Änderung der Korngröße beobachtet werden.

4.222 Platzwechselvorgänge von Atomen innerhalb eines Kristallgitters

Unter der Einwirkung von Spannungen ist die Gleichgewichtslage von Fremdatomen eine andere als in dem nichtgespannten Material. Behalten diese Atome nach dem Anlegen einer Spannung zunächst ihre alte Lage innerhalb des Gitters bei, so entstehen dadurch zusätzliche Spannungen, die verschwinden, wenn das Atom in seine neue Lage übergegangen ist. Besonders eingehend untersucht [25] ist die Dämpfung, die geringe Mengen von N oder C in Fe hervorrufen und die mit den entsprechenden magnetischen Relaxationserscheinungen in engem Zusammenhang steht. Man hat es in den meisten

Fällen mit einer einzigen Relaxationszeit $\tau = \frac{2\pi}{\omega_1}$ zu tun, so daß Gleichung (13)

streng gilt. Die Relaxationszeit hängt dabei entsprechend (57) nach

$$\tau = \tau_0 e^{\frac{E}{RT}}$$

von der Temperatur ab ($R = N k = \text{Gaskonstante}$), (13) kann daher auch in der Form

$$\delta = \frac{\delta_{\max}}{\cos\left(\frac{E}{R T} + \ln 2 \pi \tau_0 \omega\right)}$$

geschrieben werden. Die Abnahme der Relaxationszeit mit wachsender Temperatur ist einfach eine Folge der erhöhten Beweglichkeit der Atome. Man kann ähnliche Glockenkurven, wie sie sonst bei Änderung der Frequenz

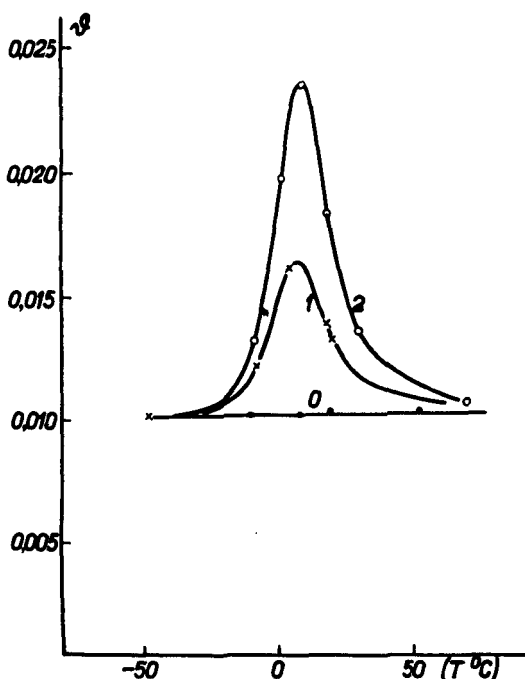


Abb. 16. Dämpfung von Torsionsschwingungen einer an einem Eisendraht aufgehängten Scheibe.

0: Der Eisendraht ist frei von C und N.

1: Der Eisendraht enthält N (nach Behandlung in einer H-Atmosphäre mit $\frac{1}{2}\%$ NH_3 bei 600°C).

2: Dasselbe mit 1% NH_3 . Frequenz: 0,2 Hz. Nach Snoek [25].

gemessen werden, auch bei Änderung der Temperatur erhalten. In dieser Weise sind die meisten Messungen durchgeführt worden. Wurden Proben genommen, aus denen die Fremdbestandteile N und C sorgfältig entfernt waren, so erhielt man eine von der Temperatur völlig unabhängige Dämpfung (vgl. Abb. 16) und kann daraus auch auf eine von der Frequenz unabhängige Dämpfung schließen. Die Aktivierungswärmen ergeben sich zu

17,7 kcal/Grad Mol für N in Fe,

19,8 kcal/Grad Mol für C in Fe.

Diese Werte sind dieselben, wie sie bei den entsprechenden magnetischen Dämpfungserscheinungen gemessen werden. Abb. 17 zeigt weitere derartige

Glockenkurven für verschiedene Frequenzen über dem Reziprokwert der Temperatur aufgetragen. Durch geeignete Verschiebung längs der Abszissenachse müssen diese Kurven ineinander überführt werden können, wie auch durch Abb. 18 bestätigt wird.

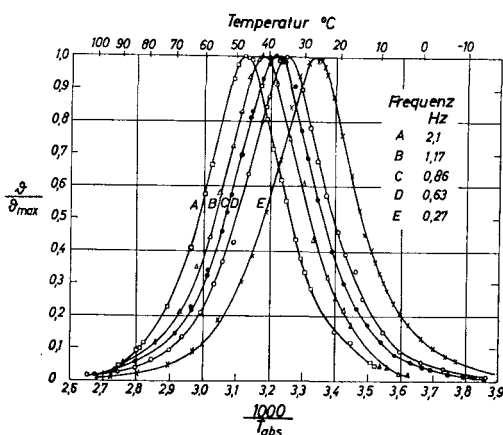


Abb. 17. Temperaturabhängigkeit der Dämpfung einer Eisenprobe mit C-Gehalt bei 5 verschiedenen Frequenzen nach Wert u. Zener [29].

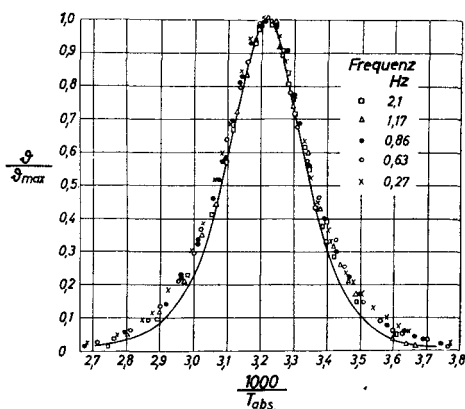


Abb. 18. Vergleich der 5 Kurven von Abb. 17 nach Verschiebung längs der Abszissenachse nach Wert u. Zener [29].

Auch bei C, N und O als Fremdatomen in Ta [13] wurden ähnliche Dämpfungserscheinungen beobachtet. Die Aktivierungswärmen sind hier

25 kcal/Grad Mol für C in Ta

29 kcal/Grad Mol für O in Ta

44 kcal/Grad Mol für N in Ta.

Eine theoretische Deutung dieser Platzwechselvorgänge geben Wert und Zener [29]. Sie gilt aber nur für das spezielle Kristallgitter und mag deshalb hier unberücksichtigt bleiben.

Fremdatome in einem Kristallitgitter können noch auf andere Weise Relaxation erzeugen [34]. Sind sie größer als die übrigen Gitteratome, so erzeugen sie nur so lange nach allen Seiten gleichmäßige Störungen des Gitters, wie sie als einzelne Atome von einer genügend großen Anzahl anderer Atome umgeben sind. Liegen aber zwei solcher Fremdatome dicht beieinander, so gibt ihre Verbindungslinie eine Vorzugsrichtung an, bei Anlegen einer äußeren Spannung strebt die Achse eines solchen Paares immer danach, sich in die Richtung der Spannung einzustellen. Dazu braucht sie aber Zeit. Geht der Spannungswechsel sehr langsam vor sich, so kann die Achse sich stets in die Richtung der Spannung einstellen, und es ist kein Grund für irgendeine Dämpfung vorhanden; dasselbe gilt auch für hohe Temperaturen, bei denen die Atome leicht beweglich sind. Bei hohen Frequenzen und bei tiefen Temperaturen kann die Achse einer Spannungsänderung nicht folgen und bleibt in ihrer Lage liegen. Auch hier ist kein Anlaß zu irgendwelcher Dämpfung vorhanden. Nur wenn die Einstellzeit von der gleichen Größenordnung wie

die Schwingungsdauer ist, wirken die Fremdatome dämpfend. Die Einstellzeit ist aber um so kleiner, je höher die Temperatur ist; deshalb wird sich das Maximum der Dämpfung bei Erhöhung der Temperatur auch zu höheren Frequenzen verschieben. Auch hier sind die Beobachtungen in erster Linie durch Änderung der Temperatur gemacht worden. Bei Messing wurde das Maximum bei 400° C und 620 Hz gefunden.

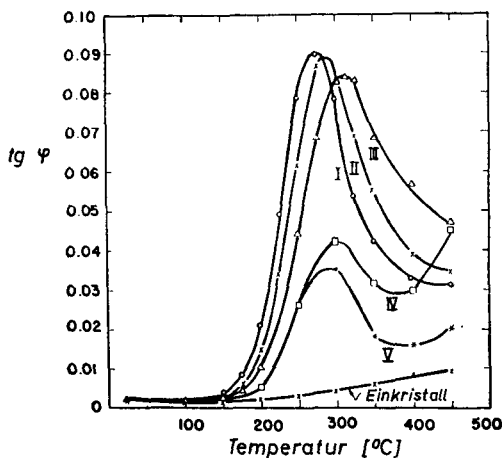


Abb. 19. Wirkung der Korngröße auf die innere Reibung in Al nach Kê [12].

I.	Anlaßtemperatur 450°, 2 Std.,	$d = 0,02$ cm
II.	„ 500°, 4 „	$d = 0,04$ „
III.	„ 550°, 2 1/2 „	$d = 0,07$ „
IV.	„ 600°, 4 „	$d = 0,084$ cm
V.	„ 600°, 12 „	$d = 0,084$ „

Drahtdurchmesser 0,084 cm

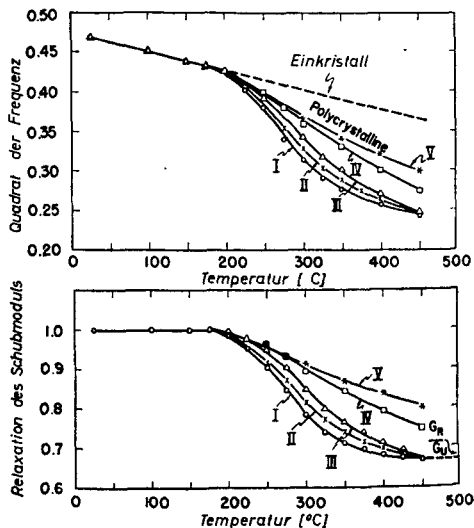


Abb. 20. Wirkung der Korngröße auf Schubmodul und Relaxation in Al, Bezeichnungen wie in Abb. 19, nach Kê [12].

4.223 Das Gleiten der Kristallflächen in polykristallinen Materialien

In polykristallinen Materialien, die unter einer äußeren Spannung stehen, gleiten die einzelnen Kristallite längs ihrer Flächen aufeinander [12]. Diese Flächen vermögen keine dauernden Schubkräfte auszuhalten. Trägt man die Dämpfung über der Frequenz oder über der Temperatur auf, so ergeben sich in beiden Fällen wieder die Glockenkurven. Außerdem hängt die Dämpfung aber auch von der Korngröße ab, und zwar derart, daß δ eine Funktion der Größe

$$d \cdot \omega \cdot e^{\frac{E}{RT}}$$

ist; die Größe $d = n^{-1/2}$ ist dabei, wie üblich, durch die Anzahl n der pro cm^2 gezählten Kristallite bestimmt. Bei Al wird das Maximum bei etwa 300° C und 1 Hz erreicht. Solange die Kristallitgröße klein gegenüber den Abmessungen des schwingenden Körpers ist, ist die Höhe des Maximums unabhängig von ihr; wenn sie dagegen vergleichbar mit den Abmessungen wird, wird das Maximum sehr schnell kleiner, und bei Einkristallen verschwindet der Effekt vollkommen, vgl. Abb. 19. Die aus der Frequenz berechnete zugehörige Dis-

persion des Moduls zeigt Abb. 20. Die Auftragung über $d \cdot \omega \cdot \exp E/RT$ ergibt dann nach Abb. 21 eine einzige Kurve. Die Aktivierungsenergien sind für

Messing- α 41 kcal/Grad Mol

Fe- α 85 kcal/Grad Mol

Al 34,5 kcal/Grad Mol

Nahezu dieselben Werte ergeben sich bei den Messungen der Diffusion von Fremdatomen durch das Atomgitter, das deutet darauf hin, daß auch hier Diffusionserscheinungen vorliegen. Die verschiedenen Relaxationserscheinungen, wie die eigentliche Relaxation, die elastische Nachwirkung, die Dämp-

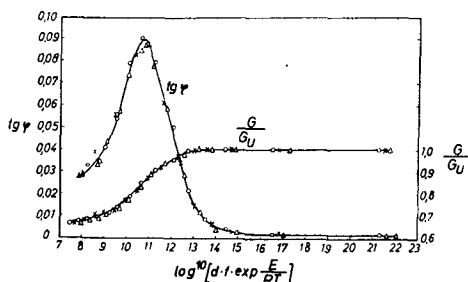


Abb. 21. Innere Reibung und Relaxation des Schubmoduls als Funktion des Parameters d. f. $\exp \left(\frac{E}{RT} \right)$.

$E = 32 \text{ kcal/Mol}$, Nach Kê [12]

○ $d = 0,02 \text{ cm}$, $f = 0,69 \text{ Hz}$

× $d = 0,04$ „ „ $f = 0,69$ „

△ $d = 0,02$ „ „ $f = 2,16$ „

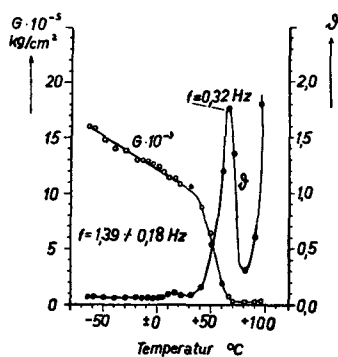


Abb. 22. Torsionsmodul G und Dämpfung δ von schwach weichgemachtem Polyvinylchlorid als Funktion der Temperatur nach Wolf [30]

fung von Schwingungen und die Dispersion des Elastizitätsmoduls lassen sich hier gut messen und miteinander vergleichen; Umrechnungen, die von Kê mit Hilfe von Näherungsformeln durchgeführt wurden, die denen ter Haars ähnlich sind, stimmen gut mit den Messungen überein.

4.224 Die Relaxationserscheinungen bei Hochpolymeren

Auch bei den aus langen Ketten bestehenden natürlichen und künstlichen hochpolymeren Stoffen werden Relaxationserscheinungen beobachtet [16 und 30]. Es handelt sich dabei um zwei verschiedene Prozesse [28]:

1. Das Reißen und möglicherweise die Neubildung von sogenannten primären Bindungen, d. s. Netzpunkte, in denen die einzelnen Ketten miteinander verbunden sind. Die Relaxationszeit ist außerordentlich groß und kann nur im Relaxations- oder Kriechversuch bei erhöhten Temperaturen gemessen werden. Sie spielt deshalb bei Schwingungen keine Rolle.

2. Außer den primären können sich aber unter der Wirkung von Spannungen auch die sogenannten sekundären Bindungen umbilden oder umlagern. Ihre Natur ist im einzelnen noch nicht geklärt. Wahrscheinlich klappen bei Deformation Kettenteile, die aus mehreren Monomeren bestehen können, in eine andere Gleichgewichtslage um, dabei können Bindungen zwischen den Seitenketten gelöst werden und diese neue Bindungen mit nach der Deformation und dem Umklappen günstiger liegenden anderen Seitenketten eingehen. Man hat es dabei meistens mit einzelnen Relaxationszeiten-Bereichen

zu tun, die nach (57) mit wachsender Temperatur kleiner werden. Da die Dämpfung durch diese Relaxation sehr groß ist, ändert sich der Elastizitätsmodul bei Durchschreiten des Maximums auch sehr stark, zuweilen um mehr als eine Zehnerpotenz (vgl. etwa Abb. 22). Bei den dielektrischen Stoffen ist diese Dämpfung eng verwandt mit der Dämpfung elektrischer Schwingungen durch dielektrische Verluste und der damit verbundenen Dispersion der Dielektrizitätskonstanten. Mechanische und dielektrische Verluste zeigen ihr Maximum meistens bei derselben Frequenz oder, wenn sie über der Temperatur aufgetragen werden, bei derselben Temperatur (vgl. hierzu [17]).

Zusammenfassung

Es wird ein Überblick über die heute existierenden Theorien zur Dämpfung schwingender fester Körper gegeben. Die ältesten sind die rein formalen Darstellungen fester Körper durch Maxwell- oder Kelvin-elemente, die heute dahingehend erweitert sind, daß der feste Körper als eine Parallelschaltung solcher Elemente mit endlich oder unendlich vielen verschiedenen Relaxationszeiten aufgefaßt wird. Vom physikalischen Standpunkt hat man zwischen solchen Dämpfungseffekten zu unterscheiden, die von der Form des schwingenden Körpers abhängen, wie die Dämpfung durch mikroskopische Wärmeströme, und solche, die eine Eigenschaft des schwingenden Materials allein sind. Für diese ist von Prandtl eine vom molekularen Aufbau der Materie ausgehende Theorie ausgearbeitet worden, die von Eyring erweitert und in eine mathematisch übersichtlichere Form gebracht wurde. Sie schließt als Spezialfall die frequenzunabhängige Dämpfung und die eigentlichen Relaxationserscheinungen ein, von denen zum Schluß die wichtigsten einzeln besprochen werden.

Literatur

- [1] R. Becker, Zs. f. Physik **33** (1925), S. 185.
- [2] K. Bennowitz, Phys. Z. **21** (1920), S. 703; **25** (1924), S. 417.
- [3] K. Bennowitz, H. Rötger, Phys. Zs. **37** (1936), S. 578; **39** (1938), S. 835.
- [4] K. Bennowitz, H. Rötger, Phys. Zs. **40** (1939), S. 416.
- [5] K. Bennowitz, Fiat Review of German Science, Bd. 8, Teil I, S. 179.
- [6] W. Braunbeck, Zs. Phys. **57** (1929), S. 501.
- [7] B. A. Dunell, A. V. Tobolsky, J. Chem. Phys. **17** (1949), S. 1001.
- [8] H. Eyring, J. Chem. Phys. **4** (1936), S. 283.
- [9] R. M. Fuoss, J. G. Kirkwood, J. Amer. Chem. Soc. **63** (1941), S. 385.
- [10] S. Glasstone, K. J. Laidler, H. Eyring, The Theory of Rate Processes, Mc-Graw-Hill Book Company, New York & London (1941).
- [11] W. Holzmüller, E. Jenkel, Zs. Phys. Chem. (A) **186** (1940), S. 359.
- [12] T. S. Kê, Phys. Rev. **71** (1947), S. 533; **72** (1947), S. 41; **73** (1948), S. 267; J. Appl. Phys. **19** (1948), S. 285.
- [13] T. S. Kê, Phys. Rev. **74** (1948), S. 9 u. 914.
- [14] W. Kuhn, Zs. Phys. Chem., **42** (1939), S. 1.
- [15] J. Meixner, Zs. f. Phys. **131** (1952), S. 456.
- [16] F. H. Müller, Kolloid Zs. **120** (1951), S. 119.
- [17] F. H. Müller, C. Schmelzer, Erg. d. exakt. Naturw. **25** (1951), S. 359.
- [18] M. Päsler, Zs. Phys. **122** (1943), S. 357; **124** (1947/48), S. 105; Ann. d. Phys. (6) **4** (1949), S. 14.
- [19] L. Prandtl, ZaMM. **8** (1928), S. 85.
- [20] L. Prandtl, Phys. Bl. **5** (1949), S. 161.

- [21] R. H. Randall, F. C. Rose, C. Zener, Phys. Rev. **56**, (1939), S. 343.
- [22] R. H. Randall, C. Zener, Phys. Rev. **58** (1940), S. 472.
- [23] F. Schwarzl, Physica **17** (1951), S. 830 u. 923.
- [24] E. Skudrzyk, Österreich. Ing.-Arch **3** (1949), S. 356.
- [25] J. Snoek, Physica **6** (1939), S. 591; **8** (1941), S. 711.
- [26] Ter Haar, Physica **16** (1950), S. 719, 738 u. 839.
- [27] A. V. Tobolsky, R. E. Powell, H. Eyring, Frontiers in Chemistry Part I, The Chemistry of Large Molecules, Interscience Publishers, New York (1943).
- [28] A. V. Tobolsky, R. D. Andrews, J. Chem. Phys. **13** (1945), S. 3.
- [29] C. Wert, C. Zener, Phys. Rev. **76** (1949), S. 1169.
- [30] K. Wolf, Kolloid Zs. **120** (1951), S. 133.
- [31] C. Zener, Phys. Rev. **52** (1937), S. 230; **53** (1938), S. 90 u. 100.
- [32] C. Zener, Phys. Rev. **53** (1938), S. 1010.
- [33] C. Zener, W. Otis, R. Nuckolls, Phys. Rev. **53** (1938), S. 100.
- [34] C. Zener, Trans. A. I. M. E. **152** (1943), S. 122; Phys. Rev. **71** (1947), S. 34.
- [35] C. Zener, Physica **15** (1949), S. 111.